Chapitre
Calculs algébriques

I Sommes et produits simples

Définition (Σ et π)

Soit I un ensemble fini non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels (ou complexes). On note

- $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ la somme des élements de la famille $(a_i)_{i\in I}$ avec $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = 0$ si $I=\emptyset$
- $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ le produit des élements de la famille $(a_i)_{i\in I}$ avec $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i = 1$ si $I=\emptyset$

Cas particulier:

- si $I = [\![1,n]\!]$ où n entier, la somme est notée $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ et vaut $a_1+\cdots+a_n$ et le produit $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$ et vaut $a_1\times\cdots\times a_n$.
- si $I = [\![m,n]\!]$ où $m\leqslant n$ entiers, la somme est notée $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i$ et vaut $a_m+\cdots+a_n$ et le produit $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} a_i$ et vaut $a_m\times\cdots\times a_n$.

Remarques (Sur les familles d'éléments $(a_i)_{i\in I}$)

Soit I un ensemble non vide (fini ou infini) et A un ensemble non vide. L'ensemble $\{a_i \ / \ i\in I\}$ est appelé **famille d'éléments a_i de l'ensemble A indexée sur** I et est notée $(a_i)_{i\in I}$.
Lorsque $I=[\![1,n]\!]$, $(a_i)_{i\in I} = \{a_1,a_2,\dots,a_n\}$.

Remarques

- L'indice i dans les sommes et produits est muet, il peut être remplacé par n'importe quelle lettre.
- Dans la somme $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i$, il y a $n-m+1$ termes.

Théorème (Règles de calculs)

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels ou complexes. Alors

$$\sum_{i\in I}(a_i+b_i)=\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in I}b_i \qquad \text{pour tout } \lambda\in\mathbb{R},\quad \sum_{i\in I}(\lambda a_i)=\lambda\sum_{i\in I}a_i \qquad \text{(linéarité de la somme)}$$

$$\prod_{i\in I}(a_ib_i)=\prod_{i\in I}a_i\prod_{i\in I}b_i \qquad \text{pour tout } \lambda\in\mathbb{R},\quad \prod_{i\in I}(\lambda a_i)=\lambda^p\prod_{i\in I}a_i \qquad \text{(où } p \text{ est le nb d'él du produit donc de } I\text{)}$$

⚠ **Attention** ⚠ Pas de formule pour $\displaystyle\sum_{i\in I} a_ib_i$. En particulier, **il est faux d'écrire** $\displaystyle\sum_{i\in I} a_ib_i = \sum_{i\in I}a_i\sum_{i\in I}b_i$.

Remarques (Sommes et produits banals)

Soit a réel ou complexe, I ensemble non vide à p éléments, et n et m entiers tels que $m \leqslant n$.

$$\sum_{i\in I} a = pa \qquad \prod_{i\in I} a = a^p \qquad \sum_{i=m}^{n} a = (n-m+1)a \qquad \prod_{i=m}^{n} a = a^{n-m+1}$$

Théorème (Sommes classiques)

1) **Sommes des k, k^2, k^3.** Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

2) **Somme des termes d'une suite arithmétique.** Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leqslant n$ alors

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} (ak+b) = \frac{(n-m+1)(\overbrace{am+b}^{\text{premier terme}} + \overbrace{an+b}^{\text{dernier terme}})}{2}}.$$

NB : $ak+b$ est le terme général d'une suite arithmétique de raison a et de premier terme $am+b$ ici.

3) **Somme des termes d'une suite géométrique.** Soient $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \sum_{k=m}^{n} q^k = \underbrace{q^m}_{\text{1er terme}} \frac{1-q^{\overbrace{n-m+1}^{\text{nb termes}}}}{1-q}}.$$

NB : q^k est le terme général d'une suite géométrique de raison q et de premier terme q^m dans la deuxième somme.

4) **Factorisation de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$.** Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots ab^{n-2} + b^{n-1}\right)}$$

NB : on peut échanger les exposants sur a et b dans la somme, $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Si n est impair :

$$\boxed{a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^{n-1-k}b^k = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + (-1)^{n-2}\cdots ab^{n-2} + (-1)^{n-1}b^{n-1}\right)}.$$

NB : on peut échanger les exposants sur a et b dans la somme, $a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^k b^{n-1-k}$.

✎ **En pratique** ✎ On rencontre souvent les relations 3) dans le cas $n = 3$, elles s'écrivent alors:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1) \qquad a^3 + 1 = (a+1)(a^2-a+1).$$

Exercice. Ecrire la factorisation de a^5+b^5.

✎ Méthode pratique ✎ (Raisonnement par récurrence)

On veut montrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étapes de la récurrence:

- **Initialisation** On montre que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie
- **Hérédité** On suppose que la propriété est vraie à un rang n FIXE. Soit $n \in \mathbb{N}$, "supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie".

  ⚠ **Attention** ⚠ On n'écrit surtout pas "supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$..."
- **Conclusion** On a donc donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, ...

Notons que si l'on doit prouver la propriété pour tout $n \geqslant n_0$, l'initialisation consiste en prouver que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

✎ Méthode pratique ✎ (Résumé des méthodes de calcul de sommes)

- Exploiter la linéarité, pour "'éclater"' la somme en des sommes usuelles
- Découper la somme en scindant les plages d'indices $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$.
- Changement d'indice : on ne peut faire que des décalages d'indice $j=k+1$, $j=k+2$, $j=k-1$...ou des inversions d'indice $j=n-k$, $j=n-k-1$. Mais on ne peut pas poser $j=2k$ ou $j=\frac{k}{2}$ (sauf s'il s'avérait que l'on somme sur les termes d'indice pair).
- Telescopage : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_m$, $\displaystyle\prod_{k=m}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m}$.

  Un telescopage peut se présenter aussi sous la forme plus générale $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(u_{k+2}-u_k)$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(u_{k+3}-u_k)$.

  Ne pas hésiter dans ce cas à exploiter la linéarité puis un changement d'indice pour calculer la somme.
- Regroupement de termes, on découpe la somme en deux en regroupant selon les termes vérifiant une certaine propriété (indices pairs/indices impairs par exemple)

Exercice. Calculer les sommes suivantes

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}(2^k-3n+k-5), \quad B_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right), \quad C_n = \sum_{k=1}^{2n}|k-n|, \quad D_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k.$$

II Coefficients binomiaux et formules du binôme

Définition (Factorielle)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle factorielle n, noté $n!$ l'entier défini par:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Par convention $0! = 1$.

Définition (Coefficients binomiaux)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$, qui se lit "p parmi n", par:

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarques (Dénombrement)

On verra que $\binom{n}{p}$ correspond au nombre de façons de choisir p éléments parmi n.

Remarques (Quelques valeurs remarquables à retenir)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Théorème (Relations coefficients binomiaux)

1) **Formule de symétrie**. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

2) **Formule du triangle de Pascal**. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

3) **Formule du sélectionneur**. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

☞ **Explication** ☜ La formule 2) s'appelle la formule du triangle de Pascal, en référence au triangle de Pascal permettant le calcul des coefficients binomiaux.

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	1		
$n=4$	1	4	$\boxed{6}$	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1
$\vdots$						

La formule fournit une règle de calcul permetant de déduire la ligne n à partir de la ligne $n-1$. Le coefficient en position (n,p) dans le tableau est la somme des coefficients en position $(n-1,p)$ et $(n-1,p-1)$ (cf. les coefficients encadrés).

Théorème (Formule du binôme de Newton)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$,

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}.$$

Conséquences :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

Exercice. Calculer les sommes suivantes $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k}$, $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k 3^{2n-3k}$.

III Sommes doubles

Théorème (Calcul de sommes doubles)

1) **Sur un rectangle**. Soient m, n, p, q des entiers naturels avec $m \leqslant n$ et $p \leqslant q$ et $(a_{i,j})_{\substack{m \leqslant i \leqslant n \\ p \leqslant j \leqslant q}}$ une famille de réels ou complexes. Alors

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} \left(\sum_{j=p}^{q} a_{ij} \right) = \sum_{j=p}^{q} \left(\sum_{i=m}^{n} a_{ij} \right)$$

(on peut permuter les sommes sans problème)

NB: la somme $\displaystyle\sum_{\substack{m \leqslant i \leqslant n \\ p \leqslant j \leqslant q}} a_{ij}$ est aussi notée $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}$.

2) **Sur un triangle**. Soient m, n des entiers naturels avec $m \leqslant n$ et $(a_{i,j})_{m \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ une famille de réels ou complexes. Alors

$$\sum_{m \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=m}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=m}^{n} \left(\sum_{i=m}^{j} a_{ij} \right)$$

(on ne permute pas les sommes sans problème, i et j sont l

☞ **Explication** ☜ **Somme sur un rectangle**

$i \backslash j$	p	$p+1$	...	q	
m	a_{mp}	a_{mp+1}	...	a_{mq}	$\leftarrow \displaystyle\sum_{j=p}^{q} a_{mj}$
$m+1$	a_{m+1p}	a_{m+1p+1}	...	a_{m+1q}	$\leftarrow \displaystyle\sum_{j=p}^{q} a_{m+1j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
n	a_{np}	a_{np+1}	...	a_{nq}	$\leftarrow \displaystyle\sum_{j=p}^{q} a_{nj}$
	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_{ip}$	$\downarrow \displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_{ip+1}$		$\downarrow \displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_{iq}$	

Pour obtenir $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} \left(\sum_{j=p}^{q} a_{ij} \right)$ on somme les coefficients de chaque ligne i (somme intérieure à i fixé) puis on somme toutes les sommes (somme sur les lignes i)

Pour obtenir $\displaystyle\sum_{j=p}^{q} \left(\sum_{i=m}^{n} a_{ij} \right)$ on somme les coefficients de chaque colonne j (somme intérieure à j fixé) puis on somme toutes les sommes (somme sur les colonnes j)

☞ **Explication** ☜ **Somme sur un triangle**

$i \backslash j$	m	$m+1$	...	n	
m	a_{mm}	a_{mm+1}	...	a_{mn}	$\leftarrow \quad \sum_{j=m}^{n} a_{mj}$
$m+1$		a_{m+1m+1}	...	a_{m+1n}	$\leftarrow \quad \sum_{j=m+1}^{n} a_{m+1j}$
				$\vdots$	
n			...	a_{nn}	$\leftarrow \quad \sum_{j=n}^{n} a_{nj}$
	$\downarrow$ $\sum_{i=m}^{m} a_{im}$	$\downarrow$ $\sum_{i=m}^{m+1} a_{im+1}$		$\downarrow$ $\sum_{i=m}^{n} a_{in}$	

Pour obtenir $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\right)$ on somme les coefficients de chaque ligne i (somme intérieure à i fixé, on commence à $j = i$) puis on somme toutes les sommes (somme sur les lignes i)
Pour obtenir $\displaystyle\sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=m}^{j} a_{ij}\right)$ on somme les coefficients de chaque colonne j (somme intérieure à j fixé, on s'arrête à $i = j$) puis on somme toutes les sommes (somme sur les colonnes j)

Exercice. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij, \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij.$

IV Système linéaires

IV.1 Généralités sur les systèmes

IV.1.a Définitions

Définition (Systèmes linéaires)

On appelle **système d'équations linéaires** un système du type:

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1p}x_p & = & b_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2p}x_p & = & b_2 & L_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & a_{np}x_p & = & b_n & L_n \end{array}\right.$$

où pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$,

- $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sont les coefficients du systèmes
- $b_j \in \mathbb{K}$ forment le second membre du système
- les $x_j \in \mathbb{K}$ sont les inconnues du système ou le p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ est une inconnue du système.

Ici (S) est un système de n équations à p inconnues.
On appelle **système homogène associé à** (S) le système de second membre nul:

$$(S_0) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1p}x_p & = & 0 & L_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2p}x_p & = & 0 & L_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & a_{np}x_p & = & 0 & L_n \end{array}\right.$$

On associe au système (S) un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes, appelé **matrice** du système (S) de format (n, p):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} & \end{pmatrix} \overset{\text{noté}}{=} (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \overset{\text{ou}}{=} (a_{ij}).$$

Remarques (Sur l'écriture des systèmes)

Il faut s'habituer à aligner les inconnues du système lorsque l'on écrit un système.

ON ECRIRA : $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & & & - & z & = & 3 \\ & & y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right.$ **ET NON :** $\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 2x-z=3 \\ y+4z=1 \end{cases}$

Définition (Vocabulaire)

- On appelle solution du système (S) tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ tel que les équations de (S) soient vérifiées.
- Résoudre le système (S) consiste à déterminer les solutions, si elles existent, de (S).
- Un système admettant au moins une solution est dit **compatible** et un système n'ademttant pas de solution est dit **incompatible**.

Remarques (Droites-Plans)

1) Dans $\mathbb{R}^2$, les solutions du système $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ sont les coordonnées des points d'intersections des deux **droites** d'équations respectives $ax+by=c$ et $dx+ey=f$. Quels sont les ensembles-solutions possibles?

2) Dans $\mathbb{R}^3$, les solutions du système $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ ex+fy+gz=h \end{cases}$ sont les coordonnées des points d'intersections des deux plans d'équations respectives $ax+by+cz=d$ et $ex+fy+gz=h$. Quels sont les ensembles-solutions possibles? Et si l'on rajoute une troisième équation (c'est-à-dire un troisième plan)?

IV.1.b Structure des ensembles solutions

Soit (E) un système de n équations à p inconnues. On note $\mathcal{S}$ son ensemble-solution et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble-solution du système homogène associé.

Théorème (Structure de $\mathcal{S}_0$)

- $(0, \dots, 0) \in \mathcal{S}_0$
- Pour tout $x=(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{S}_0$, $y=(y_1, \dots, y_p) \in \mathcal{S}_0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors
$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_p + \mu y_p) \in \mathcal{S}_0.$$
On dit que $\mathcal{S}_0$ est **stable par combinaison linéaire**.

Théorème (Struture de $\mathcal{S}$)

On suppose (S) compatible. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ une solution particulière de (S) alors:
$$\forall x \in \mathbb{K}^p, \quad x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x - \alpha \in \mathcal{S}_0.$$
Ce qui revient à écrire :
$$\mathcal{S} = \{\alpha + x_0 \ / \ x_0 \in \mathcal{S}_0\} = \alpha + \mathcal{S}_0.$$

Remarques (Vocabulaire)

Ces deux théorèmes de structure permettent d'affirmer que $\mathcal{S}_0$ a une structure d'**espace vectoriel**, et que $\mathcal{S}$ a une structure d'**espace affine** (cf. chapitres futurs).

IV.2 Opération élémentaires sur les systèmes

Définition (Opérations élémentaires)

Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice sont:

- échanger les lignes i et j noté: $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplier la ligne L_i par un scalaire non nul α noté: $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j $(i \neq j)$ noté: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Remarques (Réversibilité des opérations)

Ces trois opérations sont réversibles:

- si $L_i \leftrightarrow L_j$ change (S) en (S') alors la même transformation change (S') en (S)
- si $L_i \leftarrow \alpha L_i$ change (S) en (S') alors $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\alpha} L_i$ change (S') en (S)
- si $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ change (S) en (S') alors $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ change (S') en (S)

Définition (Équivalence)

Deux systèmes (S) et (S') sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note alors:

$$(S) \Leftrightarrow (S').$$

Exemples

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & & & - & z & = & 3 \\ & & y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right. \; {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \; \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ & & 2y & - & 5z & = & -7 \\ & & y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right. \; {\scriptstyle L_2 \leftrightarrow L_3} \; \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 5 \\ & & y & + & 4z & = & 1 \\ & & 2y & - & 5z & = & -7 \end{array}\right.$$

Théorème

Deux systèmes d'équations linéaires équivalents ont même ensemble de solutions.

Exercice. Terminer la résolution du système ci-dessous.

IV.3 Résolution des systèmes

IV.3.a Systèmes triangulaires

Définition (Systèmes et matrices triangulaires supérieurs)

- Une matrice (a_{ij}) de format $n \times n$ est dite triangulaire supérieure si tous les coefficients en dessous de la diagonale sont nuls c'est-à-dire:

$$\forall (i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket), \quad i > j \Leftarrow a_{ij} = 0.$$

- Un système est dit triangulaire supérieur si sa matrice des coefficient l'est.

Remarques

On peut évidemment introduire une définition similaire pour les matrices triangulaires inférieures.

Théorème (Résolution des systèmes triangulaires)

Soit $\mathcal{S}$ un sytème triangulaire de n équations à n inconnues. Alors $\mathcal{S}$ possède une unique solution si et seulement si tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

Exemples Trois exemples pour décrire toutes les situations

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & -5 \\ & & 3y & - & 2z & = & -1 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & & & & 2z & = & 3 \\ & & & & 3z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & & & & 2z & = & 2 \\ & & & & -4z & = & -4 \end{array}\right.$$

Exercice. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \end{array}\right.$

IV.3.b Systèmes échelonnées

Dans le cas où il y a plus d'équations que d'inconnues ($n > p$) ou plus d'inconnues que d'équations ($p > n$) la notion de système triangulaire se généralise en **système échelonné.**

Définition (Systèmes et matrices échelonnés)

- Une matrice est dite **échelonnée par lignes** si elle vérifie les propriétés suivantes:
  - si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi
  - à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul (à partir de la gauche) est situé à droite (strictement) du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{1j_1}} & \cdots & & & & & & a_{1p} \\ 0 & \cdots & \boxed{a_{2j_2}} & \cdots & & & & a_{2p} \\ & & 0 & & & & & \\ & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 & \boxed{a_{rj_r}} & \cdots & a_{rp} \\ 0 & \cdots & & & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- On appelle **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne non nul. Les $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r}$ ici.
- Un système (S) est dit **échelonné par lignes**, si sa matrice des coefficients l'est.

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \boxed{a_{1j_1}} x_{j_1} + & \cdots & & & & & +a_{1p}x_p & = & b_1 & L_1 \\ & \cdots & \boxed{a_{2j_2}} x_{j_2} + & \cdots & & & +a_{2p}x_p & = & b_2 & L_2 \\ & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & \boxed{a_{rj_r}} x_{j_r} + & \cdots & +a_{rp}x_p & = & b_r & L_r \\ & & & & & & 0 & = & b_{r+1} & L_{r+1} \\ & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & 0 & = & b_n & L_n \end{array}\right.$$

Les équations $L_1, \dots, L_r$ sont appelées **équations principales** et $L_{r+1}, \dots, L_n$ les **équations de compatibilité.**
Les inconnues $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ sont appelées **inconnues principales**, les autres sont des **inconnues secondaires** ou des **paramètres** (au nombre de $p-r$).

Remarques (Compatibilité du système)

Lorsqu'un p-uplet est solution, ce sont les toutes équations qui doivent être vérifiées, y compris les équations $L_{r+1}, \dots, L_n$ où ne figurent pas les inconnues. Il en résulte que si l'un des b_i où $i \in [\![r+1, n$ est non nul le système n'est pas compatible. Ce qui explique que ces équations sont appelées équations de compatibilité.

IV.3.c Algorithme de Gauss-Jordan

✎ Méthode pratique ✎ (Plan de résolution de système)

On veut résoudre un système (S) de n équations à p inconnues.

1) A l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, on trouve une forme échelonnée en lignes équivalente à (S). C'est l'algorithme de Gauss-Jordan ou algorithme du pivot de Gauss.

2) On étudie les relations de compatibilité.

3) On détermine inconnues principales et secondaires.

4) On terminer la résolution par remontée du système.

Exercice. Résoudre les systèmes $\left\{\begin{array}{lllll} x & -3y & +7z & = & 0 \\ x & +2y & -3z & = & 0 \\ 7x & +4y & -z & = & 1 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{lllll} x & -3y & +7z & = & 1 \\ x & +2y & -3z & = & 0 \\ 7x & +4y & -z & = & 2 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{lllll} x & +2y & -3z & = & 4 \\ x & +3y & +z & = & 11 \\ 2x & +5y & -4z & = & 13 \\ 4x & +11y & & = & 37 \end{array}\right.$

.

Exercice. Résoudre en fonction du paramètre réel m le système $\left\{\begin{array}{lllll} mx & +y & +z & = & 0 \\ x & +my & +z & = & 0 \\ x & +y & +mz & = & 0 \end{array}\right.$.