Chapitre
Équations différentielles

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I **désigne un intervalle de** $\mathbb{R}$.

I Équations différentielles linéaires du premier ordre.

I.1 Généralités

Définition

- Soient $\alpha : I \to \mathbb{K}$, $\beta : I \to \mathbb{K}$, $\gamma : I \to \mathbb{K}$ des applications continues. On dit que $y : I \to \mathbb{K}$ est une solution de l'équation différentielle du premier ordre: $(E) \quad \alpha y' + \beta y = \gamma$ si et seulement si

$$\begin{cases} y \text{ est dérivable sur } I \\ \forall x \in I,\ \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x). \end{cases}.$$

- L'équation (E) est dite **normalisée ou résolue en** y' si $\alpha : x \mapsto 1$.

Dans la suite on s'intéresse à l'équation

$$(E) \qquad y' + ay = b$$

où $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues. On note $\mathcal{S}_{(E)}$ l'ensemble des solutions de (E). On appelle **équation sans second membre** ou **équation homogène** associée à (E) l'équation

$$(E_0) \qquad y' + ay = 0.$$

On note $\mathcal{S}_{(E_0)}$ l'ensemble des solutions de (E_0).

I.2 Résolution de l'équation homogène

Théorème (Structure de $\mathcal{S}_{(E_0)}$)

$\mathcal{S}_{(E_0)}$ est **stable par combinaisons linéaires** i.e.

$$\forall (y_1, y_2) \in (\mathcal{S}_{(E_0)})^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathcal{S}_{(E_0)}.$$

De plus $\mathcal{S}_{(E_0)}$ contient la fonction nulle.
Remarque *: on dira que $\mathcal{S}_{(E_0)}$ est un espace vectoriel.*

Théorème (Résolution de l'équation homogène)

1) Soit A une primitive de la fonction a sur I. Alors l'ensemble-solution de $y' + ay = 0$ est :

$$\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda\, \mathrm{e}^{-A(x)} \end{array} \ / \ \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Remarque *: on dira que $\mathcal{S}_{(E_0)}$ est une droite vectorielle engendrée par la fonction* $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-A(x)} \end{array}$.

2) Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution de (E_0) vérifiant $y(x_0) = y_0$.

Exemples

1) Résoudre $y' - y = 0$ où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable. *L'ensemble-solution est* $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\, \mathrm{e}^x \end{array} / \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

2) Résoudre $y' + \frac{1}{x} y = 0$ où $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est dérivable. *L'ensemble-solution est* $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda}{x} \end{array} / \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

3) Résoudre $\begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ pour $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable. *L'unique solution est donc* $\begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x^2} \end{array}$.

I.3 Résolution de l'équation avec second membre

I.3.a Structure de $\mathcal{S}_{(E)}$

On rappelle l'équation avec second membre $(E) : y' + ay = b$, d'ensemble-solution $\mathcal{S}_{(E)}$ où a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

Théorème (Structure de $\mathcal{S}_{(E)}$)

Soit $y_p \in \mathcal{S}_{(E)}$, y_p est appelée **solution particulière** de (E), alors

$$\mathcal{S}_{(E)} = \{y_p + y_0 \ / \ y_0 \in \mathcal{S}_{(E_0)}\} \overset{notation}{=} y_p + \mathcal{S}_{(E_0)}.$$

Remarque *: on dira que $\mathcal{S}_{(E)}$ est un espace affine de direction $\mathcal{S}_{(E_0)}$.*

☞ **Explication** ☜ **Très important!!** Le théorème précédent montre que résoudre (E) revient à trouver une solution particulière y_p de (E) puis d'y ajouter la solution générale de l'équation homogène. L'objectif est donc dans la suite d'exposer une méthode permettant de trouver une telle solution particulière

Théorème (Problème de Cauchy)

Soient $x_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Alors, il existe une unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = \alpha \qquad \text{(condition initiale)} \end{cases}$.

I.3.b Recherche d'une solution particulière

✎ **En pratique** ✎ Comment obtenir une solution particulière? Deux méthodes essentiellement:

1) **Solution évidente.**

   Tout est dit dans le titre, on cherche une solution particulière, souvent simple, qui se voit ($x \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$), $x \mapsto x$ ou $x \mapsto x^n$...). Par exemple:

   - $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$ est solution évidente de l'équation différentielle $y' + \cos x y = \cos x$
   - $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est solution évidente de l'équation différentielle $y' + xy = 1 + x^2$.

2) **Méthode de la variation de la constante.**

   Cette méthode tire son nom du fait que l'on fait en quelque sorte varier, en fonction de x, la constante λ de la solution générale de l'équation homogène. Rappelons que la solution générale de l'équation homogène (E_0) est $x \mapsto \lambda y_0(x)$ où y_0 **ne s'annule pas**.

On cherche donc une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x)y_0(x)$ où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est dérivable sur I. On a alors:

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad (\lambda y_0)' + \lambda y_0 a = b \Leftrightarrow \lambda' y_0 + \lambda y_0' + \lambda y_0 a = b \Leftrightarrow \lambda' y_0 + \lambda \underbrace{(y_0' + a y_0)}_{=0} = b \Leftrightarrow \lambda' y_0 = b \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda' = \frac{b}{y_0} \Leftrightarrow \lambda \text{ est une primitive de } \frac{b}{y_0}. \end{aligned}$$

Théorème (Principe de superposition)

Soient $b_1 : I \to \mathbb{K}$ et $b_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
Notons y_1 et y_2 des solutions particulières respectives de:

$$y_1' + a y_1 = b_1 \qquad\qquad y_2' + a y_2 = b_2.$$

Alors $y_1 + y_2$ est solution particulière de: $\quad (E)\ \ y' + ay = b_1 + b_2$.

I.3.c Méthode de résolution

✎ Méthode pratique ✎ (Résolution d'une équation linéaire du premier ordre)

On souhaite résoudre l'équation $y' + ay = b$.

1) Résoudre l'équation homogène $y' + ay = 0$ à l'aide de la formule du cours.

2) Recherche d'une solution particulière,

   - ou bien une solution évidente
   - ou bien à l'aide de la méthode de variation de la constante.

   ✎ **En pratique** ✎ *Pour la méthode de la variation de la constante, on connaît d'avance l'issue du calcul : $y = \lambda y_0$ est solution si et seulement si $\lambda' = \dfrac{b}{y_0}$.*

   Si le second membre se présente sous la forme d'une somme, utiliser si besoin le principe de superposition.

3) Conclure en faisant la somme de la solution générale de l'équation homogène et de la solution particulière, et donner un ensemble solution.

4) S'il y a une condition initiale, déterminer la valeur de la constante à l'aide de la condition initiale.

Exemples

1) Résoudre l'équation différentielle $(E)\ \ y' + \cos x y = \cos x$ où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable.
L'ensemble-solution est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 + \lambda\,\mathrm{e}^{-\sin x} \end{array} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $(E)\ \ y' + y = 2\,\mathrm{e}^x + 1$ où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable.
L'ensemble-solution est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 + \mathrm{e}^x + \lambda\,\mathrm{e}^{-x} \end{array} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

3) Résoudre l'équation différentielle $(E)\ \ y' - \dfrac{2x}{x^2+1} y = 1$ où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable.
L'ensemble-solution est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2+1)(\lambda + \operatorname{Arctan} x) \end{array} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

4) Résoudre le problème de Cauchy (E) $\begin{cases} y' + (\cos x)y = \sin x \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$ où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable.

L'ensemble-solution est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3\,\mathrm{e}^{-\sin x} + \sin x - 1 \end{array} \right\}$.

I.4 Équation non résolue en y'

On revient à l'étude d'équations différentielles non résolues en y', (E) $\alpha y' + \beta y = \gamma$ où α, β, γ sont des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

✎ Méthode pratique ✎ (Résolution d'une équation non résolue en y')

1) **Si α ne s'annule pas sur** I, on divise par α alors $(E) \Leftrightarrow y' + \dfrac{\beta}{\alpha} y = \dfrac{\gamma}{\alpha}$, et on est ramené à la résolution d'une équation résolue en y'.

2) **Si α s'annule sur I en un seul point**, disons $x_0 \in I$ et que $I = \mathbb{R}$. On résout alors:

   - $y' + \dfrac{\beta}{\alpha} y = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ sur $]-\infty, x_0[$ de solution y_1
   - $y' + \dfrac{\beta}{\alpha} y = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ sur $]x_0, +\infty[$ de solution y_2

   Puis on "raccorde" les solutions, si c'est possible les solutions en x_0.

   - ▶ **Prolongement par continuité.** On cherche à prolonger y_1 et y_2 par continuité en x_0 en calculant les limites de y_1 et y_2 en x_0 puis on cherche des conditions pour que les limites soient égales.
   - ▶ **Dérivabilité.** On prouve que le prolongement est dérivable en x_0, à l'aide du taux d'accroissement le plus souvent, puis on cherche des conditions pour que les limites des taux d'accroissement soient égales.
   - ▶ **Équation vérifiée en** x_0. On montre que $\alpha(x_0) y_1'(x_0) + \beta(x_0) y_1(x_0) = \gamma(x_0)$.

Exemples

1) Résoudre l'équation différentielle (E) $(1 + x^2)y' + y = 0$ où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable.

   L'ensemble-solution est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\,\mathrm{e}^{-\operatorname{Arctan}(x)} \end{array} \;/\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $(E) x^2 y' + y = 1$. *L'ensemble-solution est* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \lambda_1\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array} ,\ \text{où } \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\}$.

II Équations différentielles linéaires du second ordre

II.1 Définitions

Définition

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ avec $a \neq 0$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que $y : I \to \mathbb{K}$ est une solution de l'équation différentielle du second ordre: (E) $\quad ay'' + by' + cy = f$ si et seulement si

$$\begin{cases} y \text{ est deux fois dérivable sur } I \\ \forall x \in I,\ \ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x). \end{cases}$$

Dans la suite on s'intéresse à l'équation

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = f$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ avec $a \neq 0$. On ne considèrera **uniquement** que des seconds membres exponentielles $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ ou trigonométriques $x \mapsto \cos(\beta x)$, $x \mapsto \sin(\beta x)$.
On note $\mathcal{S}_{(E)}$ l'ensemble des solutions de (E). On appelle **équation sans second membre** ou **équation homogène** associée à (E) l'équation

$$(E_0) \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

On note $\mathcal{S}_{(E_0)}$ l'ensemble des solutions de (E_0).

II.2 Résolution de l'équation homogène

Théorème (Structure de $\mathcal{S}_{(E_0)}$)

$\mathcal{S}_{(E_0)}$ est **stable par combinaisons linéaires** i.e.

$$\forall (y_1, y_2) \in (\mathcal{S}_{(E_0)})^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathcal{S}_{(E_0)}.$$

De plus la fonction nulle appartient à $\mathcal{S}_{(E_0)}$.
Remarque *: on dira que $\mathcal{S}_{(E_0)}$ est un espace vectoriel.*

Théorème (Résolution de l'équation homogène)

On associe à (E_0) l'**équation caractéristique** $ar^2 + br + c = 0$ (e) où $r \in \mathbb{K}$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **Cas complexe** ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

  1) Si $\Delta \neq 0$, (e) admet deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2. Alors

  $$\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \end{array} \ / \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

  2) Si $\Delta = 0$, (e) admet une solution complexe double $r_0 = -\frac{b}{2a}$. Alors

  $$\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (\lambda_1 x + \lambda_2) \mathrm{e}^{r_0 x} \end{array} \ / \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

- **Cas réel** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

  1) Si $\Delta > 0$, (e) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Alors

  $$\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \end{array} \ / \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

  2) Si $\Delta = 0$, (e) admet une solution réelle double $r_0 = -\frac{b}{2a}$. Alors

  $$\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda_1 x + \lambda_2) \mathrm{e}^{r_0 x} \end{array} \ / \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

  3) Si $\Delta < 0$, (e) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ et $r_2 = \overline{r_1} = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$. Alors

  $$\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{\alpha x}(\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)) \end{array} \ / \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Remarques (Lien avec la physique)

Remarquons que le physicien écrit plus souvent $\lambda_1 \cos(\beta x)+\lambda_2 \sin(\beta x)$ sous la forme $\lambda \cos(\alpha x+\varphi)$, écriture qui fait appraraître l'amplitude λ et le déphasage φ. Rappelons qu'une telle écriture est toujours possible d'après la technique de transformation de $a\cos x + b\sin x$ vue dans le chapitre Trigonométrie et Complexes.

Exemples

1) Résoudre $y''+y'-2y=0$ où $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
2) Résoudre $y''+4y'+4y=0$ où $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
3) Résoudre $y''-2y'+2y=0$ où $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
4) Soit $\omega>0$. Résoudre $y''+\omega^2 y=0$ où $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
5) Soit $\omega>0$. Résoudre $y''-\omega^2 y=0$ où $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
6) Résoudre $\begin{cases} y''+2y'+y=0 \\ y(0)=1 \quad y'(0)=1 \end{cases}$.

II.3 Résolution de l'équation avec second membre exponentielle, trigonométrique

II.3.a Structure de $\mathcal{S}_{(E)}$

On rappelle l'équation avec second membre $(E): ay''+by'+cy=f$, d'ensemble-solution $\mathcal{S}_{(E)}$ où $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3$ avec $a\neq 0$ et $f:I\to\mathbb{K}$ continue.

Théorème (Structure de $\mathcal{S}_{(E)}$)

Soit $y_p\in\mathcal{S}_{(E)}$, y_p est appelé solution particulière de (E), alors

$$\mathcal{S}_{(E)}=\{y_p+y_0 \;/\; y_0\in\mathcal{S}_{(E_0)}\} \overset{notation}{=\!=} y_p+\mathcal{S}_{(E_0)}.$$

Remarque : *on dira que $\mathcal{S}_{(E)}$ est un espace affine de direction $\mathcal{S}_{(E_0)}$.*

☞ **Explication** ☜ **Très important!!** Le théorème précédent montre que résoudre (E) revient à trouver une solution particulière y_p de (E) puis d'y ajouter la solution générale de l'équation homogène. L'objectif est donc dans la suite d'exposer une méthode permettant de trouver une telle solution particulière.

Théorème (Problème de Cauchy)

Soient $x_0\in I$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$.

Alors, il existe une unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} ay''+by'+cy=f \\ y(x_0)=\alpha \qquad y'(x_0)=\beta \quad \text{(Conditions initiales)} \end{cases}$.

☞ **Explication** ☜ On remarquera la présence de $\boxed{\textbf{deux}}$ conditions initiales dans le problème de Cauchy pour avoir unicité. Cela est lié au fait que l'équation est du $\boxed{\textbf{second}}$ ordre.

II.3.b Recherche d'une solution particulière

Théorème (Solution particulière si $f : x \mapsto K\,e^{\gamma x}$ où $\gamma \in \mathbb{C}$ et $K \in \mathbb{C}$)

Alors il existe au moins une solution polynomiale de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = K\,e^{\gamma x}$, de la forme:

- $x \mapsto \alpha\,e^{\gamma x}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$, si γ n'est **pas solution** de (e)
- $x \mapsto \alpha x\,e^{\gamma x}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$, si γ est **solution simple** de (e)
- $x \mapsto \alpha x^2\,e^{\gamma x}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$, si γ est **solution double** de (e).

✎ Méthode pratique ✎ (Recherche d'une SP exponentielle)

On souhaite obtenir une solution particulière de $(E)\quad ay'' + by' + cy = K\,e^{\gamma x}$.

1) On vérifie si γ est solution simple, double ou pas solution de (E).
2) On pose alors $y_p : x \mapsto ....$ en fonction de l'un des trois cas de figure du théorème.
3) On remplace y_p dans (E) en rédigeant ainsi :

$$y_p \text{ solution de } (E) \;\Leftrightarrow\; \boxed{\forall x \in \mathbb{R}},\quad ay_p''(x) + by_p'(x) + cy_p(x) = K\,e^{\gamma x} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\forall x \in \mathbb{R}},\quad \ldots\ldots$$

   On n'oublie pas de mentionner $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$ à chaque ligne.

4) On termine le calcul pour déterminer γ.

Exemples

1) Résoudre $y'' - 2y' + y = e^{2x}$. *Ensemble-solution :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x}(\lambda x + \mu) + e^{2x} \end{array} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

2) Résoudre $y'' - 4y' + 3y = 2\,e^{3x}$. *Ensemble-solution :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\,e^{3x} + \mu\,e^{x} + x\,e^{3x} \end{array} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

3) Résoudre $y'' - 2y' + y = 3\,e^{x}$. *Ensemble-solution :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x}(\lambda x + \mu) + \dfrac{3}{2}x^2\,e^{x} \end{array} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

✎ Méthode pratique ✎ (Recherche d'une SP trigonométrique)

Ici a, b **et** c **sont réels**. On souhaite obtenir une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = \cos(\omega x) \quad (E_1) \qquad\qquad ay'' + by' + cy = \sin(\omega x) \quad (E_2).$$

1) On cherche une solution particulière notée z_p de l'équation avec second membre exponentielle,

$$(E') : \quad ay'' + by' + cy = e^{i\,\omega x}.$$

2) ▸ $x \mapsto \mathrm{Re}(z_p(x))$ est une solution particulière réelle de (E_1)
   ▸ $x \mapsto \mathrm{Im}(z_p(x))$ est une solution particulière réelle de (E_2)

Exemples

1) Résoudre $y'' - 4y' + 3y = \cos x$. *Ensemble-solution :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\, e^{3x} + \mu\, e^{x} + \frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\sin x \end{array} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

2) Résoudre $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = \sin x \\ y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1 \end{cases}$. *Ensemble-solution :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{11}{20}\, e^{3x} - \frac{3}{4}\, e^{x} + \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{10}\sin x \end{array} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Théorème

Solution particulière si $f : x \mapsto P(x)$ où P polynomiale Soit P une fonction polynomiale. Alors il existe au moins une solution polynomiale de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = P$, de forme:

- $x \mapsto Q(x)$ si 0 n'est **pas solution** de (e)
- $x \mapsto xQ(x)$ si 0 est **solution simple** de (e)
- $x \mapsto x^2 Q(x)$ si 0 est **solution double** de (e)

où Q est une fonction polynomiale de même degré que P.

Exemples

1) Résoudre $y'' - 2y' + y = 3x + 1$. Ensemble-solution : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x}(\lambda x + \mu) + 3x + 7 \end{array} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

2) Résoudre $y'' + y' = 2x + 1$. Ensemble-solution : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\, e^{-x} + \mu + x^2 - x \end{array} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

3) Résoudre $y'' = 4x$. Ensemble-solution : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x + \mu + \frac{2}{3}x^3 \end{array} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Remarques (Principe de superposition)

Le principe de superposition reste valable pour les équations linéaires du second ordre.