Le second degré

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$ 2) $4x^2 + x - 6 = 0$ 3) $x^2 - 2x + 2 = 0$ 4) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Exercice 2 Sans utiliser le discriminant, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1) En factorisant.

-a- $3x^2 + 4x = 0$
-b- $4x^2 - 81 = 0$
-c- $x^2 + 16 = 0$
-d- $(x-3)^2 - 25 = 0$
-e- $(x+2)^2 + 9 = 0$
-f- $(3x-7)^2 - 4(x+1)^2 = 0$

2) En repérant une racine évidente et en forçant la factorisation.

-a- $x^2 - 7x + 6 = 0$
-b- $6x^2 - 7x + 1 = 0$
-c- $5x^2 + 9x + 4 = 0$
-d- $13x^2 + 15x + 2 = 0$
-e- $ax^2 + bx + c = a - b + c$ où a, b et c sont trois paramètres réels avec $a \neq 0$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations inéquations suivantes

1) -a- $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$
-b- $\frac{4}{x} + \frac{3}{x-1} = \frac{x}{4} + \frac{x-1}{3}$
-c- $x^4 + x^2 - 6 = 0$
-d- $4x^4 - 20x^2 + 25 = 0$
-e- $3x + 2\sqrt{x} - 5 = 0$

2) -a- $x \leqslant \dfrac{4}{x}$ -b- $\dfrac{x+1}{x+2} \geqslant \dfrac{3-x}{x}$ -c- $\dfrac{x+1}{3x-2} < 1$ -d- $\mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{2x} - 6 < 0$

Exercice 4. $(*)$ Soit m un paramètre réel. Soit l'équation:

$$(E_m) \quad (m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0.$$

1) Résoudre en fonction de m l'équation (E_m).

2) Déterminer la valeur de m pour que l'une des solutions soit égale à 2. Déterminer alors l'autre solution.

Exercice 5. $(**)$ Déterminer les réels m et p pour que les équations

$$(E_1) \quad x^2 - (m+1)x + m + p = 0 \qquad (E_2) \quad 2x^2 - (m-1)x + 3p = 0.$$

admettent les mêmes solutions.

Exercice 6. $(*)$ Montrer que pour tous réels x et y non nuls

$$2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 \geqslant 0.$$

Indication : on pourra poser $X = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

Exercice 7. $(**)$ Déterminer l'ensemble des réels m pour que l'inégalité $mx^2 + 2(m+1)x + 25m + 12 \geqslant 0$ soit vérifiée pour tout réel x.

Exercice 8. $(**)$- Inégalité de Cauchy-Schwarz Soient $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ $2n$ réels. Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

1) On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} (tx_i + y_i)^2$.
Ecrire $\varphi(t)$ sous la forme, $\varphi(t) = at^2 + bt + c$ où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.

2) Quel est le signe de φ ?

3) Cas $a = 0$. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée dans ce cas.

4) Cas $a \neq 0$.

   -a- En observant que φ est une fonction polynomiale du second de degré en t, calculer son discriminant.

   -b- Quel est le signe de φ? En déduire alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Logique

Exercice 9 Compléter les ... par le bon symbole : $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 16 \ldots x = 4$
2) $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = \overline{z} \ldots z \in \mathbb{R}$
3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = \pi \ldots \sin x = 0$
4) $\forall x \in [0, \pi]$, $x = \frac{\pi}{2} \ldots \cos x = 0$

Exercice 10 On considère les quatre phrases quantifiées :

1) $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$
2) $\forall x \in \mathbb{R}\,, \exists y \in \mathbb{R} \,/\, x + y > 0$
3) $\forall x \in \mathbb{R}\,, \forall y \in \mathbb{R}\,, x + y > 0$

Ces phrases sont-elles vraies? Donner leur négation.

Exercice 11 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs :

1) f est majorée
2) f est bornée
3) f est paire
4) f ne s'annule jamais
5) f n'est pas la fonction nulle
6) f est croissante
7) f ne prend que des valeurs distinctes
8) f atteint toutes les valeurs de n
9) f est inférieure à g
10) f n'est pas inférieure à g

Raisonnement

Exercice 12. Par l'absurde

1) Montrer que 0 n'admet pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel (c'est-à-dire ne peut s'écrire $\dfrac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels avec $q \neq 0$).

Exercice 13. Récurrence
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 14. Contraposition
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par contraposition que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Exercice 15. Disjonction de cas
Montrer que pour tout entier naturel n l'entier $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3.