Pour différencier les exercices selon les difficultés, ils sont étiquetés par les symboles : $(\heartsuit)$, $(*)$, $(**)$, $(***)$.

- $(\heartsuit)$: pour un un exercice très proche du cours qui ne nécessite pas trop de recherche, de calcul, de prise d'initiative.
- $(*)$: pour un exercice qui demande davantage de calculs, de réflexion sans pour autant être difficile.
- $(**)$: pour un exercice un peu plus difficile qui demandera davantage de prises d'initiative, davantage de calculs. Un exercice où l'on n'a pas forcément tout de suite l'idée qui marche et qui demandera donc peut-être plusieurs essais.
- $(***)$: pour un exercice beaucoup plus difficile.

## Équations - Inéquations - Inégalités

**Exercice 1** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes

1) $(\heartsuit)$
   -a- $|2x+1| = 3$
   -b- $|2-4x| = |3x-4|$
   -c- $|3x-1| \leqslant 2$
   -d- $|3x-2| \leqslant |x+4|$
   -e- $|3x-4| = |x^2-x+3|$
2) $(*)$
   -a- $\sqrt{|x-1|} \leqslant x-2$
   -b- $2x = \sqrt{2x^2-3x+2}$
   -c- $x|x-1| = |x|(x-1)$
   -d- $x|x-1| \leqslant |x|(x-1)$
   -e- $|x| + |x+1| + |x+2| \leqslant 3.$

**Exercice 2** Démontrer:

1) $(\heartsuit) \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{4+x}{4\sqrt{x}} \geqslant 1$
2) $(*) \forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ x + \sqrt{a^2+x^2} \geqslant 0$
3) $(*) \forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ x - \sqrt{a^2+x^2} \leqslant 0$

**Exercice 3**. $(\heartsuit)$ Prouver les inégalités suivantes:

1) $(\heartsuit) \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$
2) $(\heartsuit) \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad ab+ac+bc \leqslant a^2+b^2+c^2$
3) $(*) \forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad |\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$

**Exercice 4**. $(\heartsuit)$

1) Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a : $\dfrac{xy}{x+y} \leqslant \dfrac{x+y}{4}$.
2) En déduire que pour tout $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on a : $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a} \leqslant \dfrac{a+b+c}{2}$.

**Exercice 5**. $(*)$

1) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+y)^2 \geqslant 4xy$.
2) En déduire que pour tout $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $(a+b)(c+a)(a+b) \geqslant 8abc$.
3) En déduire que $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geqslant 9$.

**Exercice 6**. ($*$)

1) Montrer que pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $1\leqslant |1+x|+|x+y|+|y+z|+|z|$. *[Écrire $1=1+x-(.....)$]*.

2) Montrer que pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x|+|y|\leqslant |x-y|+|x+y|$. *[On distinguera les cas $|x|\leqslant|y|$ puis $|x|\geqslant|y|$]*.

## Limites, continuité, dérivabilité

**Exercice 7**. ($\heartsuit$) Calculer, si elles existent, les limites suivantes:

1) -a- $\lim\limits_{x\to+\infty}(-9x^4+x^3+6x^2+3x+5)$ -b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3+2x-4}{2x^2-6x+1}$ -c- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+3x+5}{4x^2+x+1}$

2) -a- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$ -b- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x-4})$

3) -a- $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ -b- $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x\sqrt{x}-27}{x-9}$ -c- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$

**Exercice 8**. ($\heartsuit$) Déterminer l'ensemble de définition, étudier la continuité et la dérivabilité de ces fonctions puis calculer les dérivées des fonctions $f$ d'expression (on s'arrangera évidemment pour avoir une expression la plus factorisée possible):

1) $f(x)=\mathrm{e}^x\sin(2x)$
2) $f(x)=\cos^4(3x+1)$
3) $f(x)=\sqrt{x^2-x+3}$
4) $f(x)=\sqrt{x^2+x-6}$
5) $f(x)=\sqrt{\sin x}$
6) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+1}$
7) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x^2+x+1)}$
8) $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x+3}}$
9) $f(x)=x\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$
10) $f(x)=\ln\left|2x-\sqrt{x^2+1}\right|$

**Exercice 9**. ($\heartsuit$) Déterminer l'ensemble de définition, et étudier la parité de ces fonctions

1) $f(x)=(3x^2+1)\sin(3x)-x^5$
2) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{6x}+1}{\mathrm{e}^{5x}+\mathrm{e}^x}$
3) ($\heartsuit\heartsuit$)$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

**Exercice 10**. ($\heartsuit$) On définit la fonction $f$ par $f(x)=x(1+\sqrt{|x|})$. Déterminer l'ensemble de définition, puis étudier la continuité et la dérivabilité sur l'ensemble de définition.

**Exercice 11**. ($*$) Déterminer les réels $a$ et $b$ pour que la fonction $f$ définie par $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ ax^2+bx+1 & \text{si } x>1\end{cases}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 12**. ($*$) On pose $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1) Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0.

2) Montrer que la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0.

## Graphe de fonction

**Exercice 13**. ($*$) Etudier la fonction $f:x\mapsto\ln(|x|)$ et en tracer la courbe représentative.
En déduire la courbe représentative de $g:x\mapsto|\ln(|x|)|$

**Exercice 14**. ($*$) Etudier la fonction $f : x \mapsto \cos x - \cos^2 x$ et en tracer la courbe représentative.

**Exercice 15**. ($*$) Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{\mathrm{e}^x - 1}$ et en tracer la courbe représentative.

**Exercice 16**. ($*$) Soit $f$ la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x+1}$.

1) Effectuer l'étude classique de cette fonction sans effectuer le tracé de la courbe représentative de $f$.
2) Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout $x$ dans l'ensemble de définition de $f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$. En déduire que la droite $\Delta$ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe.
3) Étudier la position de $\Delta$ par rapport à $\mathcal{C}_f$.
4) Tracer la droite $\Delta$ puis la courbe $\mathcal{C}_f$.

## Inégalités grâce à des études de fonctions

**Exercice 17**. ($\heartsuit$)

1) Déterminer le minimum de la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) En déduire que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$.

**Exercice 18**. ($**$) Montrer que: $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n-1)a^n + b^n \geqslant n a^{n-1} b$.
*(On pourra d'abord se ramener à une inégalité plus simple en divisant par $b^n$).*

**Exercice 19**. ($\heartsuit$)

1) ($\heartsuit$)Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2) ($*$)En déduire, pour $x \geqslant 0$ la limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 20** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) ($\heartsuit$)Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
2) ($*$)En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n \geqslant \ln(n+1)$ puis la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**Exercice 21**. ($*$) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x. \qquad \text{[Commencer par la seconde inégalité]}$$
2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

## Bijection

**Exercice 22.** ($\heartsuit$) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2 + \ln x$ réalise une bijection de son ensemble de définition, que l'on déterminera, vers un intervalle à préciser.
Étudier la dérivabilité de $f^{-1}$.

**Exercice 23.** ($*$) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ réalise une bijection de son ensemble de définition, que l'on déterminera, vers un intervalle à préciser. On donnera l'expression de $f^{-1}(y)$.

**Exercice 24.** ($\heartsuit$) Montrer que l'équation $(E)$ $\ln(x) - 3 + x = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 25.** ($*$) Montrer que l'équation $(E)$ $x^3 + 3x^2 - 9x + 4 = 0$ admet exactement trois solutions sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 26.** ($**$) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x - \ln x = n$.

1) Prouver que cette équation admet une unique solution $x_n > 1$.
2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
3) Montrer que $\dfrac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.