**Exercice 4**. ($*$) Soit $m$ un paramètre réel. Soit l'équation:

$$(E_m) \quad (m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0.$$

1) Résoudre en fonction de $m$ l'équation $(E_m)$.

2) Déterminer la valeur de $m$ pour que l'une des solutions soit égale à 2. Déterminer alors l'autre solution.

**Correction -**

$$(E_m) \quad (m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0.$$

1)
- Si $m = 4$, $(E_m)$ est une équation du premier degré, $(E_4) \Leftrightarrow -4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.
- Si $m \neq 4$, $(E_m)$ est une équation du second degré. Le discriminant de cette équation est:

$$\Delta = (2(m-2))^2 - 4(m-4)(m-1) = 4(m^2 - 4m + 4) - 4(m^2 - 5m + 4) = 4m.$$

Puis on distingue les cas selon le signe du discriminant:

$*$ Si $m > 0$ dans ce cas $\Delta > 0$, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_m) \Leftrightarrow x = \frac{2(m-2) - \sqrt{4m}}{2(m-4)} \text{ ou } x = \frac{2(m-2) + \sqrt{4m}}{2(m-4)} \Leftrightarrow x = \frac{m-2-\sqrt{m}}{m-4} \text{ ou } x = \frac{m-2+\sqrt{m}}{m-4}$$

$*$ Si $m = 0$ dans ce cas $\Delta = 0$, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_m) \Leftrightarrow x = \frac{2(m-2)}{2(m-4)} \Leftrightarrow x = \frac{m-2}{m-4}.$$

$*$ Si $m < 0$ dans ce cas $\Delta < 0$, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_m) \Leftrightarrow x = \frac{2(m-2) - \mathrm{i}\sqrt{-4m}}{2(m-4)} \text{ ou } x = \frac{2(m-2) + \mathrm{i}\sqrt{-4m}}{2(m-4)} \Leftrightarrow x = \frac{m-2-\mathrm{i}\sqrt{-m}}{m-4} \text{ ou } x = \frac{m-2+\mathrm{i}\sqrt{-m}}{m-4}.$$

Conclusion : $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E_m) \text{ est } \begin{cases} \left\{\frac{3}{4}\right\} & \text{si } m = 4 \\ \left\{\frac{m-2-\sqrt{m}}{m-4}, \frac{m-2+\sqrt{m}}{m-4}\right\} & \text{si } m \in ]0,4[\cup]4,+\infty[ \\ \left\{\frac{m-2}{m-4}\right\} & \text{si } m = 0 \\ \left\{\frac{m-2-\mathrm{i}\sqrt{-m}}{m-4}, \frac{m-2+\mathrm{i}\sqrt{-m}}{m-4}\right\} & \text{si } m < 0 \end{cases}}.$

2)

$$\begin{aligned} 2 \text{ solution de } (E_m) &\Leftrightarrow (m-4)2^2 - 2(m-2)2 + m - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow m - 9 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{2 \text{ solution de } (E_m) \Leftrightarrow m = 9}.$$

L'équation est donc dans ce cas, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_9) \Leftrightarrow 5x^2 - 14x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(5x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{4}{5}.$$

$\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (E_9) \text{ est donc } \left\{2, \frac{4}{5}\right\}}.$

**Exercice 5**. ($**$) Déterminer les réels $m$ et $p$ pour que les équations

$$(E_1) \quad x^2 - (m+1)x + m + p = 0 \qquad\qquad (E_2) \quad 2x^2 - (m-1)x + 3p = 0.$$

admettent les mêmes solutions.

**Correction -** $(E_1) \quad x^2 - (m+1)x + m + p = 0 \qquad (E_2) \quad 2x^2 - (m-1)x + 3p = 0.$

Notons que $(E_1)$ et $(E_2)$ sont des équations du second degré, donc $(E_1)$ et $(E_2)$ ont les mêmes solutions $x_1$ et $x_2$ si et seulement si $(E_1)$ et $(E_2)$ s'écrivent sous la forme:

$$(E_1) \ a(x-x_1)(x-x_2) = 0 \qquad (E_2) \ a'(x-x_1)(x-x_2) = 0 \qquad \text{où } (a, a') \in \mathbb{R}^2,$$

donc si et seulement si les trinômes intervenant dans les équations sont proportionnels. Par conséquent,

$$\begin{aligned} (E_1) \text{ et } (E_2) \text{ ont mêmes solutions } &\Leftrightarrow (1, -(m+1), m+p) \text{ et } (2, -(m-1), 3p) \text{ proportionnels} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -(m-1) = 2 \times (-(m+1)) \\ 3p = 2(m+p) \end{cases} \quad \text{(2 est le coeff de proportionnalité)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ 2m - p = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{(E_1) \text{ et } (E_2) \text{ ont mêmes solutions } \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ p = -6 \end{cases}}$$

**Exercice 6**. ($*$) Montrer que pour tous réels $x$ et $y$ non nuls

$$2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6 \geqslant 0. \qquad \textit{Indication : on pourra poser } X=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

**Correction -** Soient $x$ et $y$ deux réels non nuls, on pose $X=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. Notons que $X^2=\frac{x^2}{y^2}+2\frac{x}{y}\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{x^2}{y^2}+2+\frac{y^2}{x^2}$. On pose alors

$$\begin{aligned} A &= 2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6 = 2(X^2-2)-3X+6 \\ &= 2X^2-3X+2 \geqslant 0 \text{ (car le discriminant vaut } -7<0 \text{ et } 2>0). \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé:

$$\boxed{\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2, \quad \left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6\geqslant 0.}$$

**Exercice 7**. ($**$) Déterminer l'ensemble des réels $m$ pour que l'inégalité $mx^2+2(m+1)x+25m+12\geqslant 0$ soit vérifiée pour tout réel $x$.

**Correction -** On fait une disjonction de cas selon que la fonction polynomiale est du second degré ou non.

- Si $m=0$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $mx^2+2(m+1)x+25m+12=2x+12=2(x+6)$. Cette expression est négative pour $x<-6$, donc $m=0$ ne convient pas.
- Si $m\neq 0$, la fonction polynomiale est du second degré donc, l'inégalité $mx^2+2(m+1)x+25m+12\geqslant 0$ est vérifiée pour tout réel $x$ si et seulement si le discriminant $\Delta$ est strictement négatif et $m>0$. Or

  $$\Delta=(2(m+1))^2-4m(25m+12)=-96m^2-40m+4=-4(24m^2+10m-1).$$

  On résout alors:

  $$\begin{aligned} \Delta<0 &\Leftrightarrow 24m^2+10m-1>0 \\ &\Leftrightarrow m<\frac{-10-\sqrt{196}}{48} \text{ ou } m>\frac{-10+\sqrt{196}}{48} \quad \text{(discriminant vaut 196)} \\ &\Leftrightarrow m<-\frac{1}{2} \text{ ou } m>\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

  En combinant avec la contrainte $m>0$, on obtient que l'inégalité est vérifiée si et seulement si $m>\frac{1}{12}$.
- Bilan : $\boxed{\text{l'inégalité } mx^2+2(m+1)x+25m+12\geqslant 0 \text{ est vérifiée pour tout réel } x \text{ si et seulement si } m>\frac{1}{12}}$.

**Exercice 8**. ($**$)- Inégalité de Cauchy-Schwarz Soient $x_1,\dots,x_n,\ y_1,\dots,y_n$ $2n$ réels. Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité :

$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

1) On pose pour $t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t)=\sum_{i=1}^n (tx_i+y_i)^2$.
   Ecrire $\varphi(t)$ sous la forme, $\varphi(t)=at^2+bt+c$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels que l'on déterminera.
2) Quel est le signe de $\varphi$ ?
3) Cas $a=0$. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifée dans ce cas.
4) Cas $a\neq 0$.
   -a- En observant que $\varphi$ est une fonction polynomiale du second de degré en $t$, calculer son discriminant.
   -b- Quel est le signe de $\varphi$? En déduire alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Correction -**

1) Soit $t\in\mathbb{R}$, on développe dans la somme puis on utilise la linéarité de l'intégrale,

$$\varphi(t)=\sum_{i=1}^n (t^2x_i^2+2tx_iy_i+y_i^2)=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)t^2+2\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)t+\sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$\boxed{\varphi(t)=at^2+bt+c \text{ où } a=\sum_{i=1}^n x_i^2, \quad b=2\sum_{i=1}^n x_iy_i, \quad c=\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

2) En utilisant l'expression $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n}(tx_i + y_i)^2$, $\varphi(t)$ est une somme de terme positifs donc $\boxed{\varphi \text{ est positive}}$.

3) Si $a = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est une somme nulle de terme positifs, les termes sont donc nuls, donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i^2 = 0 \qquad \text{donc} \qquad x_i = 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors clairement vérifiée, car elle donne $0 \leqslant 0$.

4) Cas $a \neq 0$.

-a- Le discriminant de $\varphi$ vaut :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac = 4\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\right)}.$$

-b- D'après 2), $\varphi$ est donc une fonction polynomiale du second degré, positive, donc son discriminant est négatif ou nul c'est-à-dire avec 4)-a-,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

On applique la fonction racine carrée croissante sur $\mathbb{R}_+$, pour obtenir l'inégalité voulue :

$$\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}.$$

**Exercice 14**. Contraposition

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par contraposition que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors $n$ est pair.

**Correction -** Par contraposition, montrons que si $n$ est impair alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.
Supposons $n$ impair, posons alors $n = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1).$$

Or $k$ et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs donc l'un des deux est pair donc $k(k + 1)$ est par donc de la forme $k(k + 1) = 2p$ où $p \in \mathbb{Z}$.
Finalement $n^2 - 1 = 8p$ donc est divisible par 8.
On a donc bien prouvé : $n$ impair $\Rightarrow$ $n$ divisible par 8.
Donc par contrapostiion, $\boxed{\text{si } n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par 8 alors } n \text{ est pair}}$.

**Exercice 15**. Disjonction de cas

Montrer que pour tout entier naturel $n$ l'entier $n(n + 1)(2n + 1)$ est un multiple de 3.

**Correction -** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = n(n + 1)(2n + 1)$. Par disjonction de cas :

- si $n = 3k$ où $k \in \mathbb{N}$, $N = 3k(3k + 1)(6k + 1) = 3 \times k(3k + 1)(6k + 1)$
- si $n = 3k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$, $N = (3k + 1)(3k + 2)(6k + 3) = 3 \times (3k + 1)(3k + 1)(2k + 1)$
- si $n = 3k + 2$ où $k \in \mathbb{N}$, $N = (3k + 2)(3k + 3)(6k + 5) = 3 \times (3k + 2)(k + 1)(6k + 5)$.

Donc dans tous les cas, $\boxed{N \text{ est un multiple de 3}}$.