Les réponses aux questions doivent être soigneusement justifiées. La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale. Les **résultats** doivent être mis en évidence, **soulignés ou encadrés**. Vous pouvez sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que vous admettez les résultats non prouvés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E)\ \sqrt{\sqrt{2-x^2}+1} = x$.

Exercice 2 On rappelle que si $t \in \mathbb{R}$, $h = \sqrt[3]{t}$ est l'unique réel vérifiant $h^3 = t$.
On pose $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

1) Montrer que pour tout a, b réels $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$.
2) Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3 + \beta^3$.
3) Exprimer $(\alpha+\beta)^3$ comme fonction affine de $\alpha+\beta$. *On cherchera donc deux réels a et b tels que $(\alpha+\beta)^3 = a(\alpha+\beta)+b$.*

On pose la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^3 + 3x - 4$.

5) Vérifier que l'on a $f(\alpha+\beta) = 0$.
6) Après avoir repéré une solution évidente, résoudre $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.
7) En déduire la valeur de $\alpha+\beta$.
8) A l'aide de ce qui précède, montrer alors que α et β sont solutions d'une équation du second degré.
9) En déduire des expressions plus simples de α et β (à l'aide de racines carrées).

Exercice 3. Facultatif

1) Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$. A quelle condition a-t-on égalité?
2) En déduire que pour tout $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$,
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$
A quelle condition a-t-on égalité?