Exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathcal{D}_{(E)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x^2 \geqslant 0 \\ \sqrt{2-x^2} + 1 \geqslant 0 \ \text{(toujours vraie)} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

. Soit donc $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. On effectue une disjonction de cas.

- Si $x < 0$, comme $\sqrt{\sqrt{2-x^2}+1} \geqslant 0$ alors (E) n'a pas de solution.
- Si $x \geqslant 0$, par stricte croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et comme x et $\sqrt{\sqrt{2-x^2}+1}$ sont positifs alors,

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} + 1 = x^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = x^2 - 1.\end{aligned}$$

  De nouveau, on distingue deux cas.

  - Si $0 \leqslant x < 1$ alors $x^2 - 1 < 0$ et donc (E) n'est pas vérifiée.
  - Si $x \geqslant 1$, par stricte croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et comme x^2-1 et $\sqrt{2-x^2}$ sont positifs alors,

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow 2 - x^2 = (x^2-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{on a rejeté } \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad (\text{car } x \geqslant 0).\end{aligned}$$

    On vérifie enfin que $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \in [1, \sqrt{2}]$. En effet

$$1 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3 \quad \text{donc} \quad \frac{1+1}{2} \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{1+3}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1 \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant 2 \quad \text{et donc} \quad 1 \leqslant \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \leqslant \sqrt{2}.$$

    Bilan : $\boxed{\text{l'ensemble solution de } (E) \text{ est } \left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right\}}$.

Exercice 2 On pose $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

1) Soient a et b deux réels. Comme par définition de la racine cubique $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ et $(\sqrt[3]{b})^3 = b$ alors

$$(\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a})^3(\sqrt[3]{b})^3 = ab.$$

   Par unicité du réel h qui vérifie $h^3 = ab$, on a bien $\boxed{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}}$.

2)

$$\alpha\beta = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \overset{(1))}{=} \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = \sqrt[3]{4-5} = \sqrt[3]{-1} = -1 \qquad \boxed{\alpha\beta = -1}.$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 4. \qquad \boxed{\alpha^3 + \beta^3 = 4}$$

3) On utilise donc 2),

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ &= \alpha^3 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) + \beta^3\end{aligned}$$

$$\boxed{(\alpha+\beta)^3 = 4 - 3(\alpha+\beta)}.$$

On pose la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^3 + 3x - 4$.

5) On a

$$f(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)^3 + 3(\alpha+\beta) - 4$$

$$\boxed{f(\alpha+\beta) = 0 \quad (\text{d'après 3})}.$$

6) Notons que $f(1)=0$, on peut donc factoriser $f(x)$ par $x-1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=(x-1)(x^2+x+4).$$

Et donc pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ou } x^2+x+4=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ car le discriminant de } x^2+x+4 \text{ vaut } -15<0 \text{ donc pas de racines réelles} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble- solution de l'équation } f(x)=0 \text{ est } \{1\}}$.

7) Comme α et β sont des réels, alors $\alpha+\beta$ est réel, de plus est solution de l'équation $f(x)=0$, or d'après 6) cette équation admet 1 pour unique solution réelle donc $\boxed{\alpha+\beta=1}$.

8) On montre tout d'abord que $\alpha^2-\alpha-1=0$,

$$\begin{aligned} \alpha^2-\alpha-1 &= \alpha(\alpha-1)-1=-\alpha\beta-1 \quad (\text{car } \alpha+\beta=1) \\ &= 0 \quad (\text{car } \alpha\beta=-1). \end{aligned}$$

De même $\beta^2-\beta-1=0$.

On a donc bien prouvé que $\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont solutions de l'équation } x^2-x-1=0}$.

Rem : on pouvait aussi rédiger ainsi.
α et β sont solutions de l'équation du second degré, $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ en développant et en utilisant les relation $\alpha\beta=-1$ et $\alpha+\beta=1$ trouvées en 2) et 7), il découle que α et β sont solutions de l'équation $x^2-x-1=0$.

9) Les solutions de $x^2-x-1=0$ sont $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (valeur négative) et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (valeur positive) donc α et β sont parmi ces valeurs.
Or par définition de α, $\alpha>0$ (car $2+\sqrt{5}>0$ donc $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}>0$) et comme $\alpha\beta=-1$ alors $\beta<0$.
Donc $\boxed{\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

Exercice 3

1) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy} \geqslant 0.$$

Donc : $\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant 2}$. De plus il y a égalité si et seulement si $\dfrac{(x-y)^2}{xy} \geqslant 0 = 0$ c'est-à-dire $x-y=0$.

Il y a donc $\boxed{\text{égalite si et seulement si } x=y}$.

2) Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on utilise la question 1) trois fois en faisant des choix judicieux de couples (x,y) : $(a+b,a+c)$, $(b+a,b+c)$, $(c+a,c+b)$. On obtient :

$$(*) \qquad \frac{a+b}{a+c}+\frac{a+c}{a+b} \geqslant 2 \qquad \frac{b+a}{b+c}+\frac{b+c}{b+a} \geqslant 2 \qquad \frac{c+a}{c+b}+\frac{c+b}{c+a} \geqslant 2.$$

On somme ces trois inégalités et on regroupe par 2 les termes qui ont même dénominateur :

$$\frac{a+2b+c}{a+c}+\frac{a+b+2c}{a+b}+\frac{2a+b+c}{b+c} \geqslant 6. \quad (**)$$

La première fraction se décompose :

$$\frac{a+2b+c}{a+c}=\frac{a+c}{a+c}+2\frac{b}{a+c}=1+2\frac{b}{a+c}.$$

On décompose les deux autres fractions de la même façon et on regroupe les termes, pour obtenir

$$2\left(\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)+3 \geqslant 6.$$

On obtient alors comme demandé :

$$\boxed{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}}. \quad (***)$$

Cas d'égalité.
Notons que $(**)$ et $(***)$ sont équivalentes, il y a donc égalité dans $(***)$ si et seulement s'il y a égalité dans $(**)$ et donc si et seulement s'il y a égalité dans chacune des égalités de $(*)$ ce qui d'après le cas d'égalité de 1) est équivalent à $\begin{cases} a+b=a+c \\ b+a=b+c \\ c+a=c+b \end{cases}$

c'est-à-dire $a=b=c$.

Par conséquent, $\boxed{\text{il y a égalité si et seulement si } a=b=c}$.