Projections et symétries

Par **K** on désigne **R** ou **C**, par **E** un **K**-espace vectoriel.

Étude géométrique

On considère **F** et **G** deux sous-espaces **supplémentaires** de **E** :

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}.}$$

Soit $\vec{x} \in \mathbf{E}$. Par définition il existe un et un seul élément (f, g) de $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ tel que :

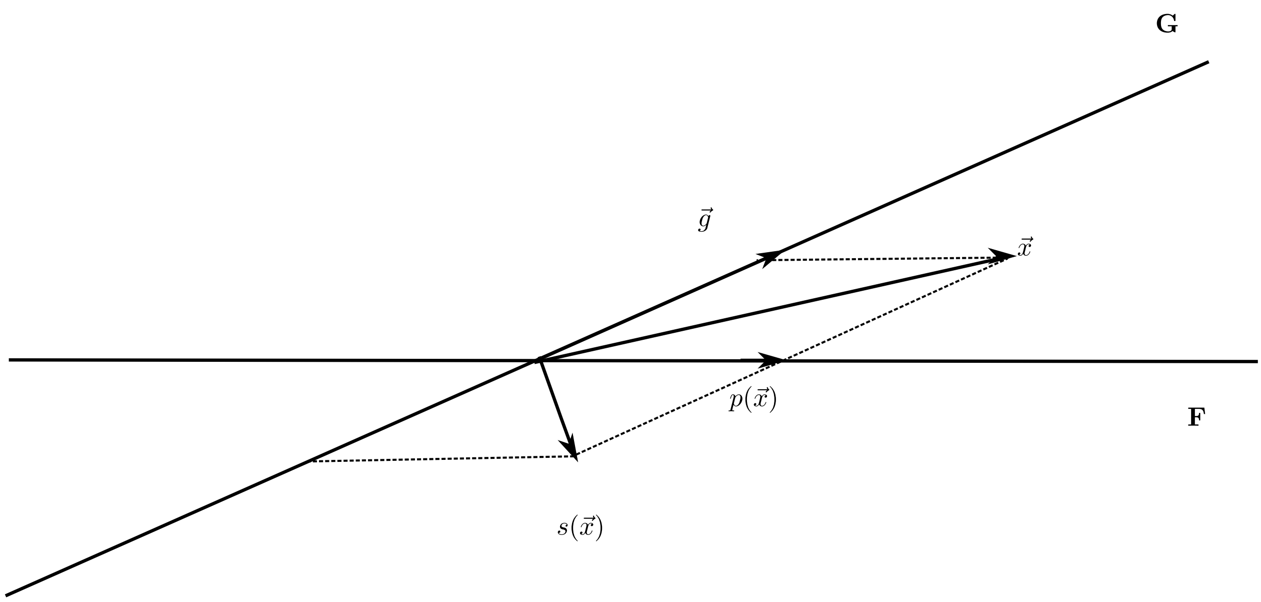
$$\boxed{\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}}$$

Définitions

On utilise la terminologie suivante :

- le vecteur $\vec{f}$ s'appelle le *projeté* de $\vec{x}$ sur **F** suivant (selon) **G** ;
- le vecteur $\vec{f} - \vec{g}$ s'appelle le *symétrique* de $\vec{x}$ par rapport à **F** suivant (selon) **G** ;
- l'application p de **E** dans **E** qui à un élément de **E** associe son projeté sur **F** suivant **G** s'appelle *projection* sur **F** suivant **G** ;
- l'application s de **E** dans **E** qui à un élément de **E** associe son symétrique par rapport à **F** suivant **G** s'appelle *symétrie* par rapport à **F** suivant **G**.

$$\boxed{\vec{x} = \underbrace{\vec{f}}_{\in \mathbf{F}} + \underbrace{\vec{g}}_{\in \mathbf{G}} \; ; \; p(\vec{x}) = \vec{f} \; ; \; s(\vec{x}) = \vec{f} - \vec{g}}$$



Exemples

1. $\mathbf{E}=\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{F}=\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{G}=\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$. Pour $M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$,
$$M=\underbrace{\left(\frac{M+M^{\mathrm{T}}}{2}\right)}_{\in\mathscr{S}_n(\mathbf{R})}+\underbrace{\left(\frac{M-M^{\mathrm{T}}}{2}\right)}_{\in\mathscr{A}_n(\mathbf{R})}; \tag{1}$$
$$p(M)=\left(\frac{M+M^{\mathrm{T}}}{2}\right)\ ;\ s(M)=\left(\frac{M+M^{\mathrm{T}}}{2}\right)-\left(\frac{M-M^{\mathrm{T}}}{2}\right)=M^{\mathrm{T}}.$$
La symétrie s est la *transposition.*
2. $\mathbf{E}=\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, $\mathbf{F}=\mathscr{P}$, espace vectoriel des éléments pairs de $\mathbf{R}^{R}$, $\mathbf{G}=\mathscr{P}$ espace vectoriel des élément impairs. Pour $f\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.
$$f=\underbrace{\left(\frac{f+f(-\cdot)}{2}\right)}_{\in\mathscr{P}}+\underbrace{\left(\frac{f-f(-\cdot)}{2}\right)}_{\in\mathscr{I}}; \tag{2}$$
$$p(f)=\left(\frac{f+f(-\cdot)}{2}\right)\ ;\ s(f)=\left(\frac{f+f(-\cdot)}{2}\right)-\left(\frac{f-f(-\cdot)}{2}\right)=f(-\cdot).$$

☞ **Les égalités (1,2) sont à connaître par cœur ; elles prouvent que $\mathbf{F}+\mathbf{G}=\mathbf{E}$, comme trivialement $\mathbf{F}\cap\mathbf{G}=\{0\}$, la supplémentarité de F et G est acquise.**

Étude algébrique

L'application p est linéaire et $\boxed{p\circ p=p}$

$$\boxed{\ker(p)=\mathbf{G}\,;\ \mathrm{Im}(p)=\mathbf{F}\,;\ \mathrm{Ker}(p-\mathrm{id}_{\mathbf{E}})=\mathbf{F}}$$

L'application s est linéaire et $\boxed{s\circ s=\mathrm{id}_{\mathbf{E}}}$

☞ **Une symétrie est donc un isomorphisme.**

$$\boxed{\ker(p-\mathrm{id}_{\mathbf{E}})=\mathbf{F}\,;\ \mathrm{Ker}(p+\mathrm{id}_{\mathbf{E}})=\mathbf{G}}$$

Les réciproque sont vraies :

Caractérisation des projections	**Caractérisation des symétries**
Une application f de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ est une projection si et seulement si : — elle est linéiare ; — $f\circ f=f$. Si c'est le cas, alors c'est une projection sur $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbf{E}})$ suivant $\mathrm{Ker}(f)$.	Une application f de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ est une symétrie si et seulement si : — elle est linéiare ; — $f\circ f=\mathrm{id}_{\mathbf{E}}$. Si c'est le cas, alors c'est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbf{E}})$ suivant $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_{\mathbf{E}})$.

Exemple.
Soit $A\in\mathbf{K}[X]$ de degré $n\geq 1$.
L'application ρ de $\mathbf{R}[X]$ qui à un élément P de $\mathbf{R}[X]$ associe le *reste* dans la division euclidienne de P par A est une projection sur $\mathbf{K}[X]_{n-1}$ suivant $A\mathbf{K}[X]$.

$$P=\underbrace{AQ}_{\in A\mathbf{K}[X]}+\underbrace{\rho(P)}_{\in\mathbf{K}[X]_{n-1}}$$

Cas préhilbertien

MPSI : $(\mathbf{E}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un espace euclidien (i.e. réel de dimension finie non nulle), $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$.
MP : $(\mathbf{E}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien réel, $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ de dimension finie.

Supplémentaire orthogonaux

L'espace vectoriel $\mathbf{F}^\perp$ des vecteurs de $\mathbf{E}$ orthogonaux à tout vecteur de $\mathbf{F}$ est un supplémentaire de $\mathbf{F}$, (c'est même l'unique supplémentaire de $\mathbf{F}$ orthogonal à $\mathbf{F}$).

$$\boxed{\mathbf{F} + \mathbf{F}^\perp = \mathbf{E}}$$

La projection sur $\mathbf{F}$ selon $\mathbf{F}^\perp$, $p_\mathbf{F}$, est appelée *projection orthogonale* sur $\mathbf{F}$.
La symétrie par rapport à $\mathbf{F}$ selon $\mathbf{F}^\perp$, $s_\mathbf{F}$, est appelée *symétrie orthogonale* par rapport à $\mathbf{F}$.

☞ **Caractérisation pratique du projété orthgonal de $\vec{x}$** : Un élément $\vec{y}$ de $\mathbf{F}$ est le projeté orthogonal de $\vec{x}$ si et seulement si : $\underline{\forall i \in [\![1, p]\!],\ \langle \vec{x} - \vec{y} | \vec{x}_i\rangle = 0}$, où $(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_p)$ est une base de $\mathbf{F}$ (ou une famille génératrice).

EXPRESSION DANS UNE BASE ORTHONORMALE DU PROJETÉ

Soient $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_p)$ une base **orthonormée** de $\mathbf{F}$, $\vec{x}$ un élément de $\mathbf{E}$. $\boxed{p_\mathbf{F}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} \langle \vec{x} | \vec{e}_i\rangle \vec{e}_i}$

Cas particulier $\mathbf{F}$ est une droite $\mathbf{D}$ dirigée par un vecteur $\vec{u}$:

$$\boxed{p_\mathbf{D}(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{u}\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2};\,,\ s_\mathbf{D}(\vec{x}) = 2p_\mathbf{D}(\vec{x}) - \vec{x} = 2\langle \vec{x} | \vec{u}\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} - \vec{x}}$$

☞ **Lorsque $\mathbf{F}$ est un hyperplan, de vecteur normal unitaire $\vec{n}$, il est plus simple de déterminer** $p_{\mathrm{vect}(\vec{n})}$ **que** $p_\mathbf{F}$ **:** $p_\mathbf{F} = \mathrm{id}_\mathbf{E} - p_{\mathrm{vect}(\vec{n})} = \mathrm{id}_\mathbf{E} - \langle \cdot | \vec{n}\rangle \vec{n}$.

Théorème de projection

Soient $\vec{x} \in \mathbf{E}$ et $\vec{y} \in \mathbf{F}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\|\vec{y} - \vec{x}\| = \mathrm{d}(\vec{x}, \mathbf{F})$.
2. $\vec{y} = p_\mathbf{F}(\vec{x})$.

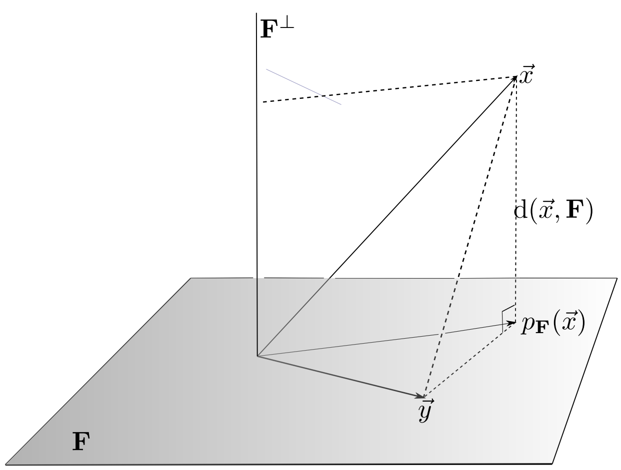


FIGURE 1. PAR LE THÉORÈME DE PYTHAGORE, $\mathrm{d}(x, \mathbf{F}) \leq \|\vec{x}, \vec{y}\|$.