I. Deux exemples simples de supplémentaires.

1. Notons G le sous-espace vectoriel de E des fonctions impaires. L'application E dans E qui à un élément f associe $f(-\,\cdot)$ est linéaire et involutive donc une symétrie, et donc

$$\underline{E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{id}_E) = F \oplus G}$$

2. L'équation différentielle proposée est linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène.

   Le cours assure que l'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ réelles est le plan dont une base est (f_1, f_2)

$$\boxed{f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)}$$

3. Soit F él ément de F, il se décompose sur la base donnée en 2, en

$$f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2$$

   En évaluant f et sa dérivée en 0, on a :

$$\begin{pmatrix} \alpha_f \\ \beta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$$

4. Notons d'abord que G est un *sous-espace de* E, c'est le noyau de l'application linéaire

$$L \ : \ E \to \mathbf{R}^2, \phi \mapsto (\phi(0), \phi'(0)).$$

   On a ensuite $F \cap G = \{0_{\mathbf{R} \to \mathbf{R}}\}$, puisque A est inversible, donc F et G sont *en somme directe*.

   Soit enfin $\phi \in E$. Notons f_ϕ l'application de F qui vérifie $L(f) = L(\phi)$ (toujours l'inversibilité de A), alors

$$\phi = f_\phi + (\phi - f_\phi).$$

   Comme $f_\phi \in F$ et trivialement $\phi - f - \phi \in G$ la somme de F et G est E entier.

   Au total : $\boxed{E = F \oplus G}$.

II. Supplémentaires, stabilité et diagonalisation.

On note dans cette partie en colonne les éléments de $\mathbf{R}^3$.

5. On voit que $(1,1,0)^\top$ et $(-2,0,1)^\top$ sont vecteurs propres associés à la valeur propre -1. Avec la trace, la dernière valeur propre est nulle. Le polynôme est scindé et $(1,1,0)^\top$ et $(-2,0,1)^\top$ étant indépendants la dimension des deux espaces propres est la multiplicité de la valeur propre correspondante.

   <u>L'endomorphisme f est donc diagonalisable.</u>

6. Soit $X \in \mathbf{R}^3$ et $X' := f(X)$ de composantes x', y' et z' .

   On a $X' = (3x - 4y + 8z, 5x - 6y + 10z, x - y + z)\top$. On a

$$x' - y' + z' = -x + y - z$$

   Ainsi a-t-on : $X' \in P$.

   Donc <u>P est stable par f.</u>

7. Les supplémentaires de P sont les droites non incluse dans P. La droite dirigée par le vecteur propre $(-2,0,1)^\top$ de f est donc un supplémentaire de P, stable par f.

$$\boxed{E = P \oplus \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$$

8. On a deux implications à prouver.

   - *Supposons f diagonalisable.* et notons $(e_1,\dots,e_n)$ une base de diagonalisation de f. Soit G un sous-espace de E. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter une base de G par des e_i de façon à obtenir une base de E. Le sous-espace engendré par les e_i utilisés est stable (puisque ces vecteurs sont propres) et est par construction un supplémentaire de G dans E.
   - *Supposons que tout sous-espace de E admette un supplémentaire stable.* Soit G la somme des espaces propres de f. Supposons G distinct de E. Choisisons un hyperplan H qui contient G (on peut par exemple compléter une base de G en une base de E et prendre H l'hyperplan engendré par cette base privée de son dernier vecteur). L'hyperplan H admet un supplémentaire D qui est une droite, stable par f. Mais alors tout vecteur directeur de D est un vecteur propre donc élément non nul de $D \cap G$ donc de $D \cap H$, ce qui contredit la supplémentarité de D et H.
     Donc $G = E$ et donc : $\underline{f \text{ est diagonalisable.}}$

III. Supplémentaires et calcul différentiel.

9 L'énoncé nous apprend que :

— l'ensemble E est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}^2}$ (donc stable par combinaison linéaire) ;
— l'ensemble E est stable par produit ;
— de manière évidente, l'application constante égale à 1 est dans E.
Donc E est une sous algèbre de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}^2}$

10. Soit $(\alpha_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ une famille presque nulle de réels telles que :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} \alpha_{i,j} f_{i,j} = 0.$$

On a, en particulier, pour tout $y \in \mathbf{R}$, que la fonction polynomiale

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_{i,j} y^j\right)}_{=P_i(y)} x^i,$$

est nulle (les sommes manipulées sont en faite finies), le cours de sup. sur les polynômes nous apprend alors que pour tout $i \in \mathbf{N}$, son i^{e} coefficient $P_i(y)$ est nul, en posant

$$P_i = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_{i,j} X^j.$$

Donc le polynôme P_i est nul, pour tout $i \in \mathbf{N}$, et donc

$$\forall j \in \mathbf{N}, \alpha_{i,j} = 0.$$

Autrement dit la famille α est nulle.

<u>D'où la liberté de $\mathcal{F}$.</u>

11. La dérivation (même partielle) étant linéaire, Δ et Φ sont linéaires.

Comme pour tout i et tout j entiers naturels,

$$\Delta(f_{i,j}) = i(i-1)f_{i-2,j} - j(j-1)f_{i,j-2} \quad \text{et} \quad \Phi(f_{i,j}) = ij f_{i-1,j-1} \tag{1}$$

avec la convention $f_{u,v} = 0$ si $u < 0$ ou $v < 0$. Les éléments d'une famille génératrice de F ayant leurs images par Δ et Φ dans F, le sous-espace F est stable par les applications linéaires Δ et Φ qui induisent donc sur F des endomorphismes $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Phi}$.

12. Soit $f \in F$. Il existe une famille $(\alpha_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}}$ de scalaires presque nulle telle que

$$f = \sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} \alpha_{i,j} f_{i,j}.$$

Alors

$$\Phi(f) = \sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} \alpha_{i,j}\Phi(f_{i,j}) = \sum_{i,j\geq 0} \alpha_{i+1,j+1}(i+1)(j+1)f_{i,j}.$$

La famille $(f_{i,j})$ étant libre on a donc $\Phi(f) = 0$ si et seulement si

$$\forall (k,\ell) \in \mathbf{N}^{*2},\ \alpha_{k,l} = 0.$$

Donc

$$\boxed{\ker(\tilde{\Phi}) = \operatorname{vec}\left((f_{0,i}, f_{i,0})_{i\in\mathbf{N}}\right)}$$

13. Comme $(f_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}}$ est une base de E, en partitionnant $\mathbf{N}^2$,

$$E = \operatorname{vect}(f_{i,0}, f(0,i))_{i\in\mathbf{N}} \oplus \operatorname{vect}(f_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^{*2}} = \ker(\tilde{\Phi}) \oplus f_{1,1}(\operatorname{vec} f_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbf{N}^2} = \underline{\ker(\tilde{\Phi}) \oplus f_{1,1}F}.$$

14. En premier lieu, L est clairement à valeurs dans F (les composantes de w sont polynomiale en les coordonnées) et l'on peut considérer L à valeur dans F.

Ensuite la linéarité de L découle imédiatement des règles de calculs dans l'algèbre F (distributivité et compatibilité entre $\cdot$ et $\circ$.

Enfin le déterminant de w vaut $-1/4$, donc w est donc un automorphisme de $\mathbf{R}^2$. On peut définir

$$\Lambda\ :\ F \to F\,;\ g \mapsto g \circ w^{-1}$$

endomorphisme de F, pour les mêmes raisons que L. Alors immédiatement on a $L \circ \Lambda = \Lambda \circ L = \mathrm{id}_F$ ce qui assure la bijectivité de L (et de Λ).

Au total, <u>L est un automorphisme de F.</u>

5. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$g(x,y) = f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right).$$

a) Donc par la règle de la chaîne,

$$\partial_1 g(x,y) = \frac{1}{2}\partial_1 f(w(x,y)) + \frac{1}{2}\partial_2 f \partial y(w(x,y),$$

$$\partial_2 g(x,y) = \frac{1}{2}\partial_1 f(w(x,y)) - \frac{1}{2}\partial_2 f \partial y(w(x,y),$$

b)o . Ensuite

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,2} g(x,y) =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\partial^2_{1,1} f(w(x,y)) + \frac{1}{2}\partial^2_{2,1} f(w(x,y))\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\partial^2_{1,2} f(w(x,y)) + \frac{1}{2}\partial^2_{2,2} f(w(x,y)\right)\\ =& \frac{1}{4}\Delta f(w(x,y)),\end{aligned}$$

grâce à la propriété admise disant $\partial^2_{1,2} = \partial^2_{2,1} f$.

• Si f est élément de $\ker\tilde{\Delta}$, alors $L(f) \in \ker\tilde{\Phi}$.

• Réciproquement $L(f) \in \ker\tilde{\Phi}$, alors Δf s'annule sur $w(\mathbf{R}^2)$ et comme w est surjectif, f est élément de $\ker\tilde{\Delta}$.

Donc l'automorphisme L induit une bijection de $\ker\tilde{\Phi}$ sur $\ker\tilde{\delta}$, autrement dit

$$\boxed{L(\ker\tilde{\Delta}) = \ker\tilde{\Phi}.}$$

16 . Soit $f \in F$.

Pour tout (x,y) in $\mathbf{R}^2$,

$$L[(f_{2,0} - f_{0,2})f](x,y) = \left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right) f(w(x,y)) = xyf(w(x,y)).$$

Donc $L[(f_{2,0} - f_{0,2})f] = f_{1,1}L(f)$. Donc en utilisant que L induit un automorphisme de F,

$$\boxed{L[(f_{2,0} - f_{0,2})F] = f_{1,1}L(F) = f_{1,1}F.}$$

17. Comme L^{-1} est un automprphisme de F, on déduit de $f_{1,1}F \oplus \ker(\tilde{\Phi}) = F$ que :

$$L^{-1}(f_{1,1}F) \oplus L^{-1}(\ker(\tilde{\Phi}) = F.$$

soit en tenant compte de 15. b) et 16,

$$\boxed{(f_{2,0} - f_{0,2})F \oplus \ker(\tilde{\Delta}) = F}$$

IV. Supplémentaires et géométrie.

17. • Supposons que $f = h \circ g$. Si $g(x) = 0$ alors $f(x) = h(0_G) = 0_F$ et donc $x \in \ker(f)$. Ainsi,

$$\boxed{\ker(g) \subset \ker(f).}$$

• Supposons $\ker(g) \subset \ker(f)$. Soit H un supplémentaire de $\ker(g)$ dans E. D'après le théorème du rang, la restriction g_1 de g à H réalise un isomorphisme de H dans $\mathrm{im}(g)$. Notons Z un supplémentaire de $\mathrm{im}(g)$ dans G. Il existe une unique application linéaire h (on la définit linéairement sur deux sous-espaces supplémentaires) de G dans E telle que

$$\forall x \in Z,\ h(x) = 0\ ;\ \forall x \in \mathrm{im}(g),\ h(x) = f \circ g_1^{-1}(x).$$

Soit alors $x \in E$. Ce vecteur se décompose en $x = s + k$, avec $s \in H$ et $k \in \ker(g)$.

Alors

$$h(g)(x) = f\circ g_1^{-1}(g(x)) = f[(g_1^{-1}(g(s))] = f[(g_1^{-1}(g_1(s))] = f(s) = f(x-k) = f(x)-f(k) = f(x),$$

car comme $\ker(g)$ est inclus dans $\ker(f)$, on a $f(k) = 0$.

Donc $\boxed{f = h \circ g}$.

D'où l'équivalence.

19. Soit ϕ définie par
$$\forall x \in E,\ \phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)).$$
Par définition, on a
$$\ker(\phi) = \bigcap_{i=1}^{k} \ker(f_i) = \bigcap_{i=1}^{k} H_i$$

- Supposons que i. soit vérifiée. Alors $\ker(\phi) \subset \ker(f_{k+1})$ et la question 17 donne l'existence de $h \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R})$ telle que $f_{k+1} = h \circ \phi$. h étant une forme linéaire de $\mathbf{R}^k$, il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_k$ tels que
$$h\ :\ (x_1, \ldots, x_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$$
$f_{k+1} = h \circ \phi$ s'écrit alors
$$f_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i,$$
d'où ii.
- Réciproquement, supposons ii. ait lieu alors trivialment f_{k+1} s'annule sur $\bigcup_{i=1}^{k} H_i$ d'oǐ.

D'où l'équivalence de i. et ii.

20. On munit $\mathbf{R}^3$ de sont repère canonique.

a) D est l'intersection des plans non parallèles P et P' d'équations respectives $P : z = 0$, $P' : y = x$, c'est donc une droite.
$\underline{D \text{ passe par le point } (0,0,0) \text{ et est dirigé par le vecteur } (1,1,0).}$

b) L'ensemble S a pour équation :
$$(x-1)^2 - 1^2 + (y-3)^2 - 3^2 + (z-2)^2 - 2^2 = 10,$$
ou mieux,
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 2^2.$$
Ainsi, S est-elle la sphère de centre $(1,3,2)$ et de rayon 2.

c) Tout plan contenant D contient $(0,0,0)$ son équation est donc de la forme $\ell(x,y,z) = 0$ où ℓ est une forme linéaire non nulle qur D, donc par 19 de la forme
$$\ell = af + a'f',$$
avec $(a, a') \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et où f et f' sont les forme linéaires
$$(x,y,z) \mapsto z\,; (x,t,z) \mapsto x - y,$$
de noyau respectifs, P et P'.
Soit un plan P_T contenant D ; il a donc pour équation :
$$a'x - a'y + az = 0,$$
avec $(a, a') \in \mathbf{R}^2$. Le plan P_T est tangent à S si et seulement si la distance du centre C de S à P_T est égale au rayon de S.

Or $\frac{(a',-a',a)}{\sqrt{2a'^2+a^2}}$ est un vecteur unitaire normal à P_T, la distance C à P_T est donc :

$$\left|\left\langle (C-(0,0,0)) \middle| \frac{(a',-a',a)}{\sqrt{2a'^2+a^2}} \right\rangle\right|. \tag{2}$$

Place pour un petit dessin...

Donc P_T est tangent à S si et seulement si, en élevant (2) au carré

$$(a'-3a'+2a)^2 = 4(2a'^2+a^2),$$

soit encore

$$-2aa' = a'^2,$$

soit finalement : $a'=0$ ou $-2a=a'$.
Dans le premier cas on trouve le plan $\boxed{P}$ et dans le second le plan d'équation $\boxed{-x+y+2z=0}$.