DM n°4

Ce cours DM est constitué d'un extrait d'un long problème de concours et d'un exercice. Il permettra de réviser les fonctions d'une variable et de patienter avant le DM 5 plus ambitieux.

PROBLÈME

Notations

Pour des entiers k et n avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial « k parmi n » est noté $\binom{n}{k}$.
Lorsque $k \leqslant n$, $[\![k, n]\!]$ représente l'ensemble des nombres entiers compris, au sens large, entre k et n.

I - Fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère dans toute cette partie, l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\,\mathrm{e}^x \end{array} \right.$$

Q 1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.
Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1, +\infty[$).

Q 2. Justifier que W est continue sur $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

Q 3. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.

Q 4. Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to 0$, ainsi qu'un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Q 5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_W$ au point d'abscisse $-\mathrm{e}^{-1}$.

Q 6. 5/2 Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \longmapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

Q 7.5/2 Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \longmapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Q 8. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, 0[$.
Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notéeV.

Q 9. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x\,\mathrm{e}^x = m \tag{I.1}$$

Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (I.1).
Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

Q 10. Pour un paramètre réel m, on considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x\,\mathrm{e}^x \leqslant m \tag{I.2}$$

En utilisant les fonctions V et W, déterminer suivant les valeurs de m le de solutions de (I.2).
Illustrer graphiquement les différents cas.

Q 11. Pour des paramètres réels non nuls a et b, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{ax} + bx = 0 \tag{I.3}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de (I.3).
Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

II - Probabilités

On étudie dans cette partie une situation dont la résolution fait intervenir les fonctions V et W définies dans la partie précédente. Les variables aléatoires considérées dans cette partie sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont notées, sous réserve d'existence, respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Un message constitué d'une suite de bits est transmis sur un canal. Cependant, ce canal n'est pas fiable : chaque bit risque d'être inversé, indépendamment des autres, avec la probabilité $1-p \in]0,1[$. Pour fiabiliser la transmission, on découpe le message et on transmet des blocs de r bits. Chaque bloc comprend à la fois des bits du message d'origine et des bits supplémentaires qui permettent de détecter et corriger une erreur. On note X le nombre d'inversions survenues lors de la transmission d'un bloc de r bits et on admet que X est une variable aléatoire. Pour que la transmission soit suffisamment fiable, on souhaite que la probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs dans un même paquet soit faible. Plus précisément, on considère $\alpha \in]0,1[$ et on veut réaliser la condition

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha \tag{II.2}$$

Pour que le codage soit efficace, on souhaite de plus que r soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.2).

Q 12. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Q 13. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $r \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{1-p}$, alors la condition (II.2) est satisfaite.

Q 14. On pose $a = \dfrac{p\ln(p)}{p-1}$ et $x = r\ln(p) - a$. Démontrer que la condition (II.2) est équivalente à la condition

$$x\,\mathrm{e}^{x} \leqslant -\alpha a\,\mathrm{e}^{-a}$$

Q 15. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie **I**) et la question **10**, étudier l'existence d'un plus grand réel r satisfaisant la condition (II.2).

Q 16. Lorsqu'il existe, exprimer cet entier en fonction de p, α et a à l'aide d'une des fonctions V ou W.

EXERCICE

Soit $\mathbf{U}$ le cercle unité de $\mathbf{C}$. On considère $\mathcal{C}$ l'ensemble des application de $\mathbf{U}$ dans $\mathbf{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire que $t \mapsto f(e^{it})$ est $\mathcal{C}^1$).

1. Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer qu'il existe une application θ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que pour tout réel t, $f(e^{it}) = e^{\theta(t)}$. Un telle application s'appelle relèvement de f.
2. Montrer que deux relèvements de f diffèrent d'une constante à préciser.
3. Soit θ un relèvement de f et t un réel. Montrer que la quantité
$$\frac{\theta(t+2\pi) - \theta(t)}{i2\pi}$$
est un entier indépendant du choix de θ et de t. On le note $\mathrm{Ind}(f)$ (indice de f).
4. Déterminer $\mathrm{Ind}(f)$ dans les cas suivants :
   (a) f est la fonction associée au monôme X^n.
   (b) $f = f_1 \times f_2$, où f_1 et f_2 sont des éléments de $\mathcal{C}$.
   (c) f est à valeur dans $\mathbf{C} - \mathbf{R}_-$.
5. Soient f_1 et f_2 des éléments de $\mathcal{C}$ tels que $|f_1(t) - f_2(t)| < |f_1(t)|$, pour tout réel t. Montrer que $\mathrm{Ind}(f_1) = \mathrm{Ind}(f_2)$. *On pourra considérer* $\dfrac{f_1}{f_2}$.
6. *Montrer que l'application de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathbf{R}$, Ind *est continue.*
7. *5/2 Soit* f *un élément de* $\mathcal{C}$ *d'indice* n. *Déterminer le plus grand connexe par arcs contenant* f.