Exercice

Soit $\mathbf{E}$ l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $a \in [0,1]$ on désigne par δ_a la forme linéaire sur $\mathbf{E}$, « valeur en a »,

$$\delta_a \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{R}\,; \mapsto f(a)$$

1. Montrer que pour tout a élément de $[0,1]$, l'application

$$N_a \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{R}\,;\ f \mapsto \|f'\|_\infty + |\delta_a(f)|$$

est une norme sur $\mathbf{E}$.

2. A-t-on équivalence de ces normes ?
3. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathbf{E}$, non nulle, telle que pour tout $f \in \mathbf{E}$ à valeurs positives ou nulles, $\ell(f)$ soit positive ou nulle. On considère l'application

$$N_\ell^* \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{R}\,;\ f \mapsto \|f'\|_\infty + \ell(|f|).$$

Montrer que N_ℓ^* est une norme. Est elle équivalente à N_0 ?

Indications

2. Soit f élément de $\mathbf{E}$.

Soient a et b des points de $[0,1]$ tels que

$$|f(a)| = \inf_{x\in[0,1]}(|f(t)|)\,;\ |f(b)| = \sup_{x\in[0,1]}|f(t)|,$$

(continuité de $|f'|$).

La positivité de ℓ donc sa croissance veut qu'en posant $k = \ell(\mathbf{1})$:

$$k(|f(0)|-\|f'\|_\infty\times 1) \leq k(|f(0)|-\|f'\|_\infty\times a) \leq k|f(a)| \leq \ell(|f|) \leq k|f(b)| \leq k(|f(0)|+\|f'\|_\infty b) \leq k(|f(0)|+\|f'\|_\infty\times 1).$$

Donc d'une part

$$N_\ell^*(f) \leq \|f'\|_\infty + \leq k(|f(0)| + \|f'\|_\infty \times 1) \leq (k+1)N_0(f).$$

D'autre part

$$|f(0)| \leq \frac{1}{k}\ell(|f|) + \|f'\|_\infty \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) N_\ell^*(f),,$$

comme ℓ est non nul, alors $k \neq 0$. Donc

$$N_0(f) \leq \left(2 + \frac{1}{k}\right) N_\ell^*(f).$$