EXERCICE

Soit $\mathbf{U}$ le cercle unité de $\mathbf{C}$. On considère $\mathcal{C}$ l'ensemble des application de $\mathbf{U}$ dans $\mathbf{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire que $t \mapsto f(e^{it})$ est $\mathcal{C}^1$).

1. *Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer qu'il existe une application θ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que pour tout réel t, $f(e^{it}) = e^{\theta(t)}$.*

   On note $g = f(\exp(\mathrm{i}\,\cdot)$

   Analyse.

   En supposant l'existence d'une telle solution on a en dérivant l'égalité $g = \exp(\theta)$ que nécessairement $\theta = c_0 + F$. où F est la primitive nulle en 0 de $\dfrac{g'}{g}$ et $c_0 = \ln(r) + i\phi_0$ où r est le module de $g(0)$ et ϕ_0 un de ses arguments.

   Synthèse Soit θ ainsi défini. En dérivant $g\exp(-\theta)$, on trouve que cette application est constante, et l'on a qu'elle vaut 1 en 0.....

2. *Montrer que deux relèvements de f diffèrent d'une constante à préciser.*

   Soient θ_1 et θ_2 deux relèvements. Pour tout $t \in \mathbf{R}$ que $\exp(\theta_1 - \theta_2) = 1$. Par égalité des modules, en notant R la partie réelle de $\theta_1 - \theta_2$, on a $\exp(R) = 1$ soit $R = 0$. La partie imaginaire ϕ vérifie :

   $$\exp(\mathrm{i}\phi) = 1$$

   Donc ϕ est à valeur dans $2\pi\mathbf{Z}$. On concluera par le théorème des valeur intermédiaire.

3. *Soit θ un relèvement de f et t un réel. Montrer que la quantité*

   $$\frac{\theta(t+2\pi) - \theta(t)}{i2\pi}$$

   est un entier indépendant du choix de θ et de t. On le note $\operatorname{Ind}(f)$ *(indice de f).*

   L'indépendance par rapport à θ découle de 2 immédiatement. Par définition de θ, vient pour tout t réel que $\dfrac{\theta(t+2\pi) - \theta(t)}{i2\pi}$ est un entier relatif. Le théorème des valeurs intermédiaires achève la question.

4. Déterminer $\operatorname{Ind}(f)$ dans les cas suivants :

   (a) *f est la fonction associée au monôme X^n.*

   Alors $\operatorname{Ind}(f) = n$

   (b) *$f = f_1 \times f_2$, où f_1 et f_2 sont des éléments de $\mathcal{C}$.*

   Sans mal $\operatorname{Ind}(f_1 f_2) = \operatorname{Ind}(f_1)\operatorname{Ind}(f_2)$

   (c) *f est à valeur dans $\mathbf{C} - \mathbf{R}_-$.* La réponse repose qu'il existe une application ϕ de $\mathbf{U}\backslash\{-1\}$ dans $]-\pi, \pi[$ continue telle que pour tout $z \in \mathbf{U}\backslash\{-1\}$, on ait $z = (\exp(\mathrm{i}\phi(z))$ (détermination continue de l'argument principal). L'application ϕ s'explicite :

   $$\phi(x+iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{1+x}\right).$$

   On peut alors explicité un relèvement de f dont le caractère $\mathcal{C}^1$ est vérifiable :

   $$\theta(t) = \ln(|g(t)|) + \mathrm{i}\phi\left(\frac{g(t)}{|g(t)|}\right).$$

   On a alors sans mal que l'indice est nul.

5. *Soient f_1 et f_2 des éléments de $\mathcal{C}$ tels que $|f_1(t) - f_2(t)| < |f_1(t)|$, pour tout réel t. Montrer que* $\operatorname{Ind}(f_1) = \operatorname{Ind}(f_2)$. *On pourra considérer $\dfrac{f_2}{f_1}$.*

   Comme $\left|1 - \dfrac{f_2}{f_1}\right| \leq 1$ le point c) de la question précédente montre que l'indice de $\dfrac{f_2}{f_1}$ est nul. On concluera par b).

6. *Montrer que l'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}$,* Ind *est continue, pour la norme N_∞.*

   Résulte de la question précédente, l'indice est constant au voisinage de chaque fonction.

7. 5/2 Soit f un élément de $\mathcal{C}$ d'indice n. Déterminer le plus grand connexe par arcs contenant f.