correction du DS n°8

I. Inégalité polynomiale de Bernstein et applications.

I.A - Polynômes de Tchebychev

1. On montre par récurrence que $\boxed{\forall n \in\ \mathbb{N},\ \deg(T_n) = n}$.
   - C'est vrai aux rang 0 et 1.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On a alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ qui est somme de deux polynômes de degrés $n+1$ et $n-1$. Comme ces degrés sont différents, T_{n+1} est de degré $\max(n+1, n-1) = n+1$.

   $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ étant échelonnée en degré est libre. Elle contient $n+1$ éléments de $\mathbb{C}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Ainsi,

$$\boxed{(T_k)_{0\leq k\leq n} \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X]}$$

2. Notons (R_n) lerésultat à prouver.
   — (R_0) et (R_1) sont instantanéments vrais ;
   — soit un entier $n \geq 1$. Supposons (R_k) vrai pour $k = 0, 1, ..., n$. On a alors par (R_n) et $(R_{n-1}$.

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos(\theta)) =& 2\cos(\theta)T_n(\cos(\theta) + T_{n-1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ =& 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta) \\ =& \cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin((n)\theta) = \cos((n+1)\theta). \end{aligned} \tag{1}$$

   D'où (R_{n+1}).

   Par récurrence on a prouvé que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{T_n(\cos) = \cos(n\,\cdot)}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on vient de montrer que $T_n(\cos) \in \mathcal{S}_n$; Soit un élément P de $\mathbb{C}_n[X]$. Il est une combinaison linéaire de $T_0, ...T_n$, donc, comme $\mathcal{S}_n$ est un espace vectoriel $\boxed{P(\cos) \in \mathcal{S}_n}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $x \in [-1, 1]$. $T_n(x) = T_n(\cos(\arccos(x))) = \cos(n\arccos(x)) \leq 1$. Donc $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} \leq 1$
   Mais $T_n(1) = \cos(n\arccos(1)) = \cos(n \times 0) = \cos(0) = 1$. Donc

$$\boxed{\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1}$$

5. Prouvons par récurrence sur n que

$$\forall \theta \in\ \mathbb{R},\ |\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$$

   — C'est immédiat au rang 0 ;
   — Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 0$. On a alors, pour tout réel θ,

$$|\sin((n+1)\theta)| \leq |\sin(n\theta)\cos(\theta)| + |\sin(\theta)\cos(n\theta)| \leq |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| \leq (n+1)|\sin(\theta)|$$

   et le résultat est vrai au rang $n+1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
En dérivant la relation $T_n(\cos)) = \cos(n\cdot)$, on obtient

$$-\sin T_n'(\cos) = -n\sin(n\cdot) \tag{2}$$

En combinant ceci avec l'inégalité précédente :

$$|\sin||T_n'(\cos)| \leq n^2|\sin|$$

Donc comme sinus de s'annule pas sur $]0,\pi[$, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$|T_n'(x)| = |T_n'(\cos(\arccos(x))| \leq n^2$$

Inégalité vraie pour $x = \pm 1$ par continuité du polynôme T_n.
En dérivant (2) et en évaluant en 0, il vient : $\sin^2(0)T''(1) - \cos(0)T'(1) = -n^2\cos(n\times 0)$, soit $T'(1) = n^2$ On a donc

$$\boxed{\forall n \in \ \mathbb{N},\ \|T_n'\|_{L^\infty([-1,1))} = n^2}$$

I.B - Inégalité de Bernstein

6. Par hypothèse, et en notant c le coefficient dominant de A,

$$A = c\prod_{j=1}^{2n}(X-\alpha_j)$$

On en déduit que

$$A' = c\sum_{k=1}^{2n}\prod_{\substack{1\leq j\leq 2n\\ j\neq k}}(X-\alpha_j)$$

et en particulier pour $k = 0, \ldots 2n$,

$$A'(\alpha_k) = c\prod_{\substack{1\leq j\leq 2n\\ j\neq k}}(\alpha_k-\alpha_j)\,;$$

Posons pour $k = 0, \ldots 2n$, $L_k = \frac{A(X)}{(X-\alpha_k)A'(\alpha_k)}$, ce qui précède on reconnait en L_k le k^{e} polynôme d'interpolation de Lagrande aux points $\alpha_1, \ldots \alpha_{2n}$. Donc

$$\boxed{\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X], \quad B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k)\frac{A(X)}{(X-\alpha_k)A'(\alpha_k)}}$$

On peut aussi utiliser la décomposition en éléments simple de $\frac{B}{A}$*, particulièrement aisée puisque les pôles sont simples.*

7. Soit λ un complexe. On a $P_\lambda(1) = 0$ et donc $\boxed{(X-1) \text{ divise } P_\lambda}$.
8. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Les deux membres de l'égalité à prouver étant des expressions linéaires vis à vis de P, il suffit de vérifier la formule pour des P formant une base de $\mathbb{C}_{2n}[X]$, par exemple les X^k. Or,

$$\frac{(\lambda X)^k - \lambda^k}{X-1} = \lambda^k(X^{k-1} + X^{k-2} + \cdots + 1)$$

et la valeur en 1 est $k\lambda^k$, qui est bien $\lambda(k\lambda^{k-1})$.

$$\boxed{\forall \lambda \in \ \mathbb{C},\ Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)}$$

On pouvait aussi écrire la formule de Taylor pour $P(\lambda X)$ en 1

9. On a Posons $\omega_0 = \exp\left(i\frac{\pi}{2n}\right)$. Immédiatement $\omega_0^{2n} = \exp i\pi = -1$. L'ensemble des racines $2n^{\text{e}}$ de -1 est alors $\omega_0 \mathrm{U}_{2n}$ soit $\{\omega_0, \omega_1, ...\omega_{2n-1}\}$. Mais comme $\omega_{2n} = \omega_0$

$$\boxed{R(X) = \prod_{k=0}^{2n-1} (X - \omega_k) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k)}$$

10. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si on applique (I.1) avec $A = R$ et $\alpha_k = \omega_k$ (qui sont bien distincts), on obtient, compte-tenu de $R'(\omega_k) = 2n\omega_k^{2n-1} = -\frac{2n}{\omega_k}$ (puisque $\omega_k^{2n} = -1$)

$$Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{Q_\lambda(\omega_k) R(X)}{X - \omega_k} \omega_k.$$

Comme les ω_k sont différents de 1, l'expression de Q_λ donne alors

$$\boxed{Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{X^{2n} + 1}{X - \omega_k} \omega_k}$$

En substituant 1 à X, Avec la question 8, on a alors

$$\lambda P'(\lambda) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{2}{1 - \omega_k} \omega_k.$$

Il reste ≪ à couper la somme en deux ≫ pour conclure que

$$\boxed{\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}}$$

11. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. La formule (I.2) avec $P = X^{2n}$ donne,

$$2n\lambda^{2n} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\lambda^{2n}\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} - \frac{\lambda^{2n}}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} = -\frac{\lambda^{2n}}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} = -n.$$

ce qui permet, après multiplication par $P(\lambda)$ de réécrire le second terme de (II.2) et de conclure que

$$\boxed{\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} + nP(\lambda)}$$

12. Soit $f \in \mathcal{S}_n$ elle se met sous la forme $a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\cdot) + b_k \sin(k\cdot)$ où $a_0, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ sont des complexes. Avec les formules d'Euler, on a pour tout reéel t,

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikt} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikt} \right) \\ &= e^{-int} \left(a_0 e^{int} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{i(k+n)t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{i(n-k)kt} \right) \right) \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$U(X) = a_0 X^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} X^{k+n} + \frac{a_k + ib_k}{2} X^{n-k} \right),$$

élément de $\mathbb{C}_{2n}[X]$, on a $\boxed{f(t) = e^{-int} U(e^{it})}$.

13. On a $1 - \omega_k = e^{i\varphi_k/2}(e^{-i\varphi_k/2} - e^{i\varphi_k/2}) = -2ie^{i\varphi_k/2}\sin(\varphi_k/2)$ et ainsi

$$\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{2e^{i\varphi_k}}{-4e^{i\varphi_k}\sin(\varphi_k/2)^2} = \frac{-1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$$

Appliquons la question 11 au polynôme U. Avec l'expression ci-dessus, on obtient

$$\lambda U'(\lambda) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U(\lambda\omega_k) \frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + nU(\lambda)$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $\lambda = e^{it}$, on obtient (puisque $f'(t) = -inf(t) + ie^{-int}e^{it}U'(e^{it})$)

$$\begin{aligned} -ie^{int}(f'(t) + inf(t)) &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U\left(e^{i(t+\varphi_k)}\right) \frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + nU(e^{it}) \\ &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} e^{in(t+\varphi_k)} f(t+\varphi_k) \frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + ne^{int} f(t) \end{aligned}$$

Comme $e^{in\varphi_k} = i(-1)^k$, on conclut que

$$\boxed{f'(t) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(t+\varphi_k) \frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}}.$$

14. D'après la question 11 avec $P = 1$, on a

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -n.$$

et avec la question 13, on en déduit que

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2} = n.$$

Par inégalité triangulaire à partir de la question 13,

$$|f'(\theta| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{1}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2} = n\|f\|_{L^\infty([-1,1])}.$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |f'(\theta)| \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}$$

I.C - Quelques conséquences de l'inégalité (I.4)

15. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Posons $f : t \mapsto P(\cos(t))$. La question 3 nous indique que c'est un élément de $\mathcal{S}_n$. Pour tout $x \in [-1, 1]$, la question 14 au point $\arccos(x)$ dit :

$$|f'(\arccos(x))| = |-\sin(\arccos(x))P'(\cos(\arccos(x)))| = \underline{|\sqrt{1-x^2}P'(x)| \leq n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq nP_{L^\infty([-1,1])}},$$

car $|\sin| = \sqrt{1 - \cos^2}$ et $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

16. Soit H un polynôme primivee de $-Q$. On a $H(\cos)$ élément de $\mathcal{S}_n$ (par I.A.3) or $\mathcal{S}_n$ est clairement stable par dérivation $(H(\cos))' = Q(\cos)\sin$, donc $Q(\cos)\sin$ est élément de $\mathcal{S}_n$.
Avec les notation du texte, et par 1.4.

$$n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq |f'(0)| = |-Q'(\cos(0))\sin^2(0) + Q(\cos(0))\cos(0)| = |Q(1)|.$$

Mais $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$ et $|\sin| = \sqrt{1-\cos^2}$ donc

$$\underline{|Q(1)| \leq n \sup_{-1\leq x\leq 1}\left|Q(x)\sqrt{1-x^2}\right|}$$

17. Considérons l'élément de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, $S_t(X) = R(tX)$. Par 16,

$$|R(t)| = |S_t(1)| \leq n \sup_{-1\leq x\leq 1}\left|S_t(x)\sqrt{1-x^2}\right| \leq n \sup_{-1\leq x\leq 1}\left|R(tx)\sqrt{1-t^2x^2}\right|,$$

car pour tout $x \in [-1,1]$, on a $1-x^2 \leq 1-t^2x^2$. Donc

$$|R(t)| \leq n \sup_{-|t|\leq y\leq |t|}\left|R(y)\sqrt{1-y^2}\right| \leq n \sup_{-1\leq y\leq 1}\left|R(y)\sqrt{1-y^2}\right|,$$

car $|t| < 1$.

18. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on peut appliquer ce qui précède à $P' \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$\forall t \in [-1,1],\ |P'(t)| \leqslant n \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right|$$

Avec la question 15, on a donc

$$\forall t \in [-1,1],\ |P'(t)| \leqslant n^2\|P\|_{L^\infty([-1,1])}.$$

et ainsi

$$\boxed{\|P'\|_{L^\infty([-1,1])} \leq n^2\|P\|_{L^\infty([-1,1])}}$$

19. D'une part, on $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1$ (question 4). D'autre part, $\|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2$ (question 5). Ainsi,

$$\boxed{\text{L'inégalité est une égalité quand } P = T_n \in\ \mathbb{C}_n[X]}$$

II Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

II.A - Transformée de Fourier d'une fonction

20. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
   - Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   - On a l'hypothèse de domination : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ |f(x)e^{-ix\xi}| \leq |f(x)|$ et la fonction $|f|$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$

   Ainsi, la fonction $\hat{f}$ est-elle définie continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$$

21. L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire (linéarité du passage à l'intégrale). Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ |\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ix\xi}|\ dx = \|f\|_1$$

et donc $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ avec

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

Ceci montre que l'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ est continue et même 1 lispchitzienne (pour les normes proposées).

$$\boxed{f \mapsto \hat{f} \text{ est continue de } \left(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right) \text{ dans } (L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)}$$

22. f étant continue, g l'est aussi. De plus, le changement de variable linéaire $u = \lambda x$ donne

$$\int_0^a |g(x)|\ dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda a} |f(u)|\ du$$

et cette quantité admet une limite finie quand $a \to +\infty$ et aussi quand $a \to -\infty$. Il y a donc intégrabilité aux voisinage des infinis et

$$\boxed{g \in L^1(\mathbb{R})}$$

On peut alors écire $\hat{g}(\xi)$ et le même changement de variable donne

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\xi u/\lambda}\ du$$

et ainsi

$$\boxed{\hat{g}(\xi) = \tfrac{1}{\lambda}\hat{f}(\tfrac{\xi}{\lambda})}$$

II.B - Produit de convolution

23. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq |f(t)|\|g\|_\infty$$

f étant intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ l'est aussi, ce qui assure la définition de $f * g$ sur $\mathbb{R}$.
Le changement de variable $u = x - t$ donne immédiatement

$$\boxed{(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\ du = (g*f)(x)}$$

24. L'inégalité de la question précédente entraine que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |(f*g)(x)| \leq \|g\|_\infty\|f\|_1$$

et ainsi

$$\boxed{f * g \text{ est bornée et } \|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty}$$

25. On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
• $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(t)g(x-t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée p^{e}, pour $p = 0, ..., k$, $x \longmapsto f(t)g^{(p)}(x-t)$.
• $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)g^{(p)}(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable, car $|f(t)g^{(p)}(x-t) = O(|f(t)|)(t \to +\infty)$, puisque la dérivée d'ordre p de g est bornée.
• $\forall x, t \in \mathbb{R}$, $\forall p \in [\![0, k]\!]$, $\left|f(t)g^{(p)}(x-t)\right| \leq \|g^{(p)}\|_\infty |f(t)|$ et ce majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Le théorème s'applique et donne que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ avec

$$\boxed{(f * g)^{(k)} = f * \left(g^{(k)}\right)}$$

26. Par définition

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t) g(x-t)\, dt \right) dx$$

Avec le résultat admis,

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t) g(x-t)\, dx \right) dt,$$

par changement de v riable linéaire « $u = x - t$ » dans l'intégrale intérieure :

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(u+t)\xi} f(t) g(u)\, du \right) dt,$$

donc

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t) e^{-it\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\xi} g(u)\, du \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} \hat{g}(\xi)\, dt.$$

Finalement :

$$\boxed{\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}}$$

II. C - Introduction d'une fonction plateau

27. La restriction de φ à $\mathbb{R}_+^*$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus on prouve par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la restriction de $\varphi^{(k)}$ à $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme :

$$t \mapsto P_k(1/t) \left\{ \begin{array}{l} e^{-1/t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. ,$$

où P_k est un polynôme.
Par le théorème de limite de la dérivée, il suffit de montrer que φ est continue et toutes les dérivées ont une limite finie en 0 pour conclure que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. C'est le cas avec une limite nulle (évident à gauche et par croissances comparées à droite) pour toute les dérivée, et pour la fonction une limite épointée en 0 égale à $\varphi(0)$.

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

28. Soit $t \in \mathbb{R}$. On vérifie que

$$\psi(t) = \varphi(1 - t^2)$$

En effet, si $|t| \geq 1$, $1 - t^2 \leq 0$ et $\varphi(1 - t^2) = 0 = \psi(t)$ et si $|t| < 1$, $1 - t^2 > 0$ et $\varphi(1 - t^2) = e^{1/(t^2-1)} = \psi(t)$. Par théorèmes d'opération,

$$\boxed{\psi \in \mathcal{C}^\infty}$$

29. $\boxed{\theta \in \mathcal{C}^\infty}$ comme primitive d'une telle fonction. De plus θ' est nulle sur chaque intervalle $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ et donc θ est constante sur chacun de ces intervalles.

$$\boxed{\theta \text{ est constante sur }]-\infty, -1] \text{ et sur } [1, +\infty[}$$

Par théorème fondamental,

$$\theta(x) = \int_0^x \psi(t)\ dt$$

et les constantes sont

$$A = -\int_{-1}^0 e^{\frac{1}{t^2-1}}\ dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 e^{\frac{1}{t^2-1}}\ dt$$

Dans les deux cas, on intègre une fonction continue positive non nulle et les intégrales sont > 0. Ainsi

$$\boxed{A < 0 < B}$$

et les constantes sont en particulier différentes.

30. Notons $h_1 = \frac{\psi - A}{B - A}$: c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, -1]$ et valant 1 sur $[1, +\infty[$.
$h_1(2x+3)$ vaut 0 si $x \leq -2$ et vaut 1 si $x \geq -1$.

Notons $h_2 = \frac{\psi - B}{A - B}$: c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $[1, +\infty[$ et qui vaut 1 sur $]-\infty, -1]$.
$h_2(2x-3)$ vaut 0 si $x \geq 2$ et vaut 1 si $x \geq 1$.

La fonction $\rho = h_1 h_2$ est nulle hors de $]-2, 2[$ et vaut 1 sur $[-1, 1]$.

$$\boxed{\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{ constante égale à 1 sur } [-1,1] \text{ et constante égale à 0 sur } \mathbb{R}\backslash[-2,2]}$$

II.D -Inégalités de Bernstein

31. On remarque tout d'abord que

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} e^{ix\xi} \rho(\xi)\ d\xi$$

On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- Pour tout x, $\xi \mapsto e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est continue sur le segment et donc intégrable sur ce segment.
- Pour tout $\xi \in [-2, 2]$, $x \mapsto e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est de classe C^1 de dérivée $x \mapsto i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)$.
- Pour tout x, $\xi \mapsto i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)$ est continue.
- On a enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\xi \in [-2, 2]$, $|i\xi e^{ix\xi}\rho(\xi)| \leq 2\|\rho\|_{\infty,[-2,2]}$ et la fonction majorante est intégrable sur le segment $[-2, 2]$.

$$\boxed{r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ et } r'(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{ix\xi} \rho(\xi)\ d\xi}$$

32. Utilisons à nouveau l'expression ci-dessus de r. Par intégrations par parties (sur un segment) et comme ρ et toutes ses dérivées sont nulles en 2 et -2, on trouve

$$2\pi x^2 r(x) = i \int_{-2}^{+2} x e^{ix\xi} \rho'(\xi)\, d\xi = -\int_{-2}^{+2} e^{ix\xi} \rho''(\xi)\, d\xi$$

et ainsi

$$|x^2 r(x)| \leq \frac{1}{2\pi} 4 \|\rho''\|_{L^\infty([-2,2])}$$

$$\boxed{x \mapsto x^2 r(x) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

r est continue sur $\mathbb{R}$ et par le début de la question, $r(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $(x \to \pm\infty)$, qui prouve par comparaison aux fonctions de Riemann que :

$$\boxed{r \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$$

Enfin, on a $|r(x)| \leq \frac{2}{\pi} \|\rho\|_{L^\infty([-2,2])}$ et

$$\boxed{r \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$