

## Oral Python

Des joueurs, au nombre de  $n$  ( $n \geq 2$  évidemment) s'affrontent dans un tournoi ou chacun rencontre tous les autres, chaque confrontation se solde par la victoire d'un et seulement un des deux. L'issue du tournoi sera représenté par une matrice  $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$  (matrice de tournoi)

définie par :

- $a_{i,i} = 0$ , pour  $i = 1, \dots, n$  ;
- $a_{i,j} = 1$  si le joueur numéro  $i$  à gagné contre le joueur numéro  $j$ ,  $a_{i,j} = -1$  sinon, pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $\{1, \dots, n\}$  distincts.

1. Ecrire une fonction renvoyant une matrice de tournoi aléatoire.
2. Calculer alors des déterminants de telles matrices pour des valeurs de  $n$  paires et impaires.
3. Démontrer la propriété postulée pour les valeurs de  $n$  impaires.
4. (a) Soit  $J_n$  l'élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer  $\det(J_n - I_n)$   
(b) Soit  $M$  et  $N$  des matrice d'ordre  $n$  à coefficients entiers telles que les coefficients de  $M - N$  soient tous pairs. Montrer que  $\det(M)$  et  $\det(N)$  ont même parité.  
(c) Démontrer la propriété postulée pour les valeurs paires de  $n$ .