

DM n°1

Ce très court DM est là pour attendre que de nouvelles notions soient traitées. Il utilise essentiellement des connaissances et des raisonnements de sup. Il est à rendre pour le 16 septembre.

Exercice 1

Dans ce bel exercice, les variables aléatoires considérées sont toutes définies sur un même espace probabilisé¹ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et n désignera un entier naturel non nul.

On note (L_1, \dots, L_n) la base des polynômes d'interpolation de Lagrange pour le n -uplet de points $(1, 2, \dots, n)$,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(j) = \delta_{i,j}.$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$ on désigne par m_k le moment d'ordre k de X :

$$M_k = \mathbf{E}(X^k).$$

On se propose, dans cette question, de montrer de deux manières que la loi de X est entièrement déterminée par m_1, \dots, m_{n-1} . Autrement dit toute variable aléatoire ayant pour $k = 1, \dots, n-1$, m_k comme moment d'ordre k suit la même loi que X . On remarquera que $m_0 = 1$.

- (a) Pour $k = 1, 2, \dots, n$ déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathbf{1}_{X=k}$.
- (b) Exprimer, pour $k = 1, 2, \dots, n$, $\mathbf{1}_{X=k}$ au moyen de X et L_k .
Conclure.
- (c) On considère G_X^* la fonction polynôme² :

$$G_X^* : t \mapsto \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = k)t^{k-1}.$$

Montrer que la loi de X est entièrement déterminée par G_X^* ; autrement dit, si une variable aléatoire Y vérifie $G_X^* = G_Y^*$ alors elle suit la même loi que X .

- (d) Exprimer $G_X^{*'}(1)$, $G_X^{*''}(1)$ au moyen de m_1 et m_2 .
- (e) Montrer que pour $k = 1, \dots, n-1$, la fonction $G_X^{*(k)}(1)$ s'exprime au moyen de m_0, m_1, \dots, m_{n-1} . On ne demande pas d'expliciter cette relation.
En déduire de nouveau le résultat.

2. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Montrer que A est de rang 1 si et seulement si il existe des matrices colonnes U et V éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nulles, telles que :

$$A = UV^\top.$$

1. Les 3/2 ne se formaliseront pas de cette clause légale, dont ils ne percevront le sens qu'en fin d'année, sans que ce soit de quelque façon une gêne.

2. Cette fonction est presque la fonction génératrice de X que l'on étudiera cette année.

On considère deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ on note

$$a_{i,j} = \mathbf{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$$

et on pose $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Pour $j = 1, \dots, n$ on note C_j la j^{e} colonne de A et pour $i = 1, \dots, n$, L_i sa i^{e} ligne.

3. On se propose de montrer que A est de rang 1 si et seulement si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

(a) On suppose X et Y indépendantes. Montrer que le rang de A est 1.

On suppose à présent que $\text{rg}(A) = 1$.

(b) Posons $U = C_1 + \dots + C_n$. Exprimer les composantes de U au moyen de X .

(c) Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que pour $i = 1, \dots, n$,

$$C_i = \alpha_i U$$

(d) Exprimer $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ au moyen de Y .

On pourra considérer la somme des lignes L_1, \dots, L_n .

(e) Montrer que X et Y sont indépendantes.

4. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ on note

$$b_{i,j} = \mathbf{E}(X^{i-1}Y^{j-1})$$

et on pose $B = (b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Pour $j = 1, \dots, n$ on note C'_j la j^{e} colonne de B et pour $i = 1, \dots, n$, L'_i sa i^{e} ligne.

On se propose de montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si B est de rang 1.

(a) On suppose X et Y indépendantes. Montrer que le rang de B est 1.

On suppose dans la suite que le rang de B est 1.

(b) Montrer qu'il existe des réels $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ tels que pour $j = 0, \dots, n-1$ et $i = 0, \dots, n-1$,

$$\mathbf{E}(X^i Y^j) = \alpha'_j \mathbf{E}(X^i).$$

(c) Montrer :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{E}(X^i Y^j) = \mathbf{E}(X^i) \mathbf{E}(Y^j).$$

(d) Montrer que pour $j = 1, \dots, n$ et $i = 1, \dots, n$,

$$\mathbf{E}(L_i(X) L_j(Y)) = \mathbf{E}(L_i(X)) \mathbf{E}(L_j(Y)).$$

En déduire l'indépendance de X et Y .

5. On reprend la matrice A étudiée en 3.

Déterminer les valeurs possibles du rang de A .

Exercice 2

Soit un espace euclidien $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ de dimension non nulle n .

1. Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ des vecteurs de \mathbf{E} unitaires.

Nous nous proposons de montrer qu'il existe des éléments $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ de $\{-1, 1\}$ tels que :

$$\left\| \sum_{i=1}^p \varepsilon_i \vec{v}_i \right\| \leq \sqrt{p}.$$

Soient X_1, X_2, \dots, X_p des variables de Rademacher³ indépendantes. On pose R la variable aléatoire

$$R = \left\| \sum_{i=1}^p X_i \vec{v}_i \right\|^2.$$

En étudiant l'espérance de R conclure.

2. On considère à présent $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs de \mathbf{E} de norme inférieure ou égale à 1. Soient q_1, \dots, q_p des éléments de $[0, 1]$, on pose

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^p q_i \vec{u}_i.$$

\vec{v} est un vecteur du parallélépipède \mathcal{P} construit sur les \vec{v}_i , du moins lorsque $n \geq p$. Pour toute partie I de $\{1, \dots, p\}$, on pose

$$\vec{v}_I = \sum_{i \in I} \vec{u}_i,$$

les \vec{v}_I sont les sommets du parallélépipède \mathcal{P} .

Nous allons montrer : *il existe un sommet de \mathcal{P} distant de \vec{v} de moins de $\frac{\sqrt{n}}{2}$.*

On considère p variables de Bernoulli X_1, \dots, X_p indépendantes et la variable aléatoire

$$S = \left\| \sum_{i=1}^p X_i \vec{u}_i - \vec{v} \right\|^2.$$

En choisissant astucieusement le paramètre de chaque variable $X_i, i = 1, \dots, p$, conclure.

Exercice 3 FACULTATIF

Par n on désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Pour tout entier $n \geq 1$, E_n désigne l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On appelle *antichaîne* de \mathbf{E}_n toute partie \mathcal{A} de $\mathcal{P}(E_n)$ telle que pour tout couple (A, B) d'éléments distincts de \mathcal{A} , A ne soit pas inclus dans B .

1. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Déterminer une antichaîne de cardinal $\binom{n}{k}$. Pour quelle valeur de k est-elle de cardinal maximum ?
2. On se propose de montrer le résultat suivant (Sperner 1928, preuve probabiliste de Lubell 1966) :

Le cardinal d'une antichaîne de E_n est au plus $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

3. Une variable de Rademacher est une variable qui prend la valeur -1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et la valeur 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, elle modélise par exemple un jeu de pile ou face équitable ou le joueur empoche deux fois la mise s'il gagne et dans tous les cas laisse sa mise.

- (a) Soit \mathcal{A} une partie de $\mathcal{P}(E_n)$. On munit S_n de la probabilité \mathbf{P} uniforme. Pour tout $\sigma \in S_n$ on considère la chaîne C_σ :

$$C_\sigma = \left\{ \emptyset, \{\sigma(1)\}; \{\sigma(1), \sigma(2)\}, \dots, \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} \right\}.$$

On définit sur S_n la variable aléatoire X qui à un élément σ de S_n associe le cardinal de $C_\sigma \cap \mathcal{A}$ et pour tout A de \mathcal{A} , X_A est la variable aléatoire indicatrice de l'événement $A \in C_\sigma$.

Déterminer pour tout élément de \mathcal{A} la loi de X_A et son espérance.

- (b) Exprimer X en fonction des X_A , $A \in \mathcal{A}$. En déduire le lemme de Sperner.