Correction du DS n°1

Sujet 1

PARTIE I.

1. (a) Soient $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$

$$f(\lambda(x_1 + x_2)) = 2\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda f(x_1, x_2),$$

donc f est homogène de degré 1.

(b) Soient $(x_1, x_2)) \in {\mathbf{R}_+^*}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$

$$f(\lambda(x_1 + x_2)) = \sqrt{\lambda^3 x_1^3 + 3\lambda^3 x_1 x_2^2} = \lambda^{\frac{3}{2}} f(x_1, x_2),$$

donc f est homogène de degré $\frac{3}{2}$.

(c) Soient $(x_1, x_2) \in {\mathbf{R}_+^*}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$

$$f(\lambda(x_1 + x_2) = \lambda^{-2}\lambda f(x_1, x_2),$$

donc f est homogène de degré -2.

2. Notons c la faleur constante de f sur la droite D_1 d'équation $x_1 = 1$.
Preuve 1.
Soit (x, y) un point de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. La demi-droite ouverte d'origine $(0, 0)$ et passant par (x, y) est incluse dans C, donc par 0-homogénéité, f est constante sur cette droite, mais elle rencontre D_1 donc $f(x, y) = c$.
preuve 2 (variante).
Soit (x, y) un point de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. Par 0-homogénéité

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{x}\right)^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = c.$$

En conclusion f est constante sur C.

3. L'application $C \to \mathbf{R}\,;\ (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{x_1 + 2024x_2}$ est homogène de degré -1.
L'application $C \to \mathbf{R}\,;\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2)^\pi$ est homogène de degré π.

4. (a) Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. Pour tout $(x_1, x_2) \in C$,

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2),$$

en calculant la dérivée partielle des deux membres, pour $i = 1, 2$,

$$\lambda \partial_i f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^\alpha \partial_i f(x_1, x_2).$$

soit :

$$\partial_i f(\lambda(x_1, x_2) = \lambda^{\alpha-1} \partial_i f(x_1, x_2).$$

Les dérivées partielles de f sont $\alpha - 1$-homogènes.

(b) Soit $(x_1, x_2) \in C$. concidérons,

$$g \ : \ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R} \,; \ t \mapsto f(t(x_1, x_2))$$

La règle de la chaîne assure que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$

$$g'(t) = x_1 \partial_1 f(tx_1, tx_2) + x_2 \partial_2 f(tx_1, tx_2).$$

Mais pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $g(t) = t^\alpha f(x_1, x_2)$, et donc $g'(t) = \alpha t^{\alpha - 1} f(x_1, x_2)$. En égalant les deux expressions pour $t = 1$:

$$\underline{x_1 \partial_1 f(x_1, x_2) + x_2 \partial_2 f(x_1, x_2) = \alpha f(x_1, x_2).} \tag{1}$$

(c) Gardons les notations du (b). Pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$tg'(t) = tx_1 \partial_1 f(tx_1, tx_2) + tx_2 \partial_2 f(tx_1, tx_2) = \alpha f(tx_1, tx_2) = \alpha g(t).$$

Donc g est LA solution sur $\mathbf{R}_+^*$ du problème de Cauchy linéaire d'ordre 1,

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha}{t} y, \\ y(1) = f(x_1, x_2). \end{cases}$$

Donc pour tout réel $t > 0$,

$$f(tx_1, tx_2) = g(t) = f(x_1, x_2)(\exp\left(\alpha \int_1^t \frac{1}{s} \mathrm{d}s\right) = t^\alpha f(x_1, x_2).$$

<u>La fonction f est α-homogène.</u>

5. (a) Notons $X = \{\mathbf{C} \to \mathbf{R}\, (x, y) \mapsto \phi\left(\frac{y}{x}\right), \phi \in \mathbf{R}^\mathbf{R}\}$.
   - Soit $f \in h_0$. Posons $\phi \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,; \ t \mapsto f(1, t)$. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{C}$,

   $$f(x, y) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \phi\left(\frac{y}{x}\right),$$

   $(x \neq 0)$, donc $f \in X$, et donc

   $$H_0 \subset X.$$

   - L'inclusion $H_0 \subset X$ est évidente.

   Concluons : $\underline{H_0 = \{\mathbf{C} \to \mathbf{R}\, (x, y) \mapsto \phi\left(\frac{y}{x}\right), \phi \in \mathbf{R}^\mathbf{R}\}.}$

(b) De même $\underline{H_1 = \{\mathbf{C} \to \mathbf{R}\, (x, y) \mapsto x\phi\left(\frac{y}{x}\right), \phi \in \mathbf{R}^\mathbf{R}\}.}$

(c) Soit $L \ : \ \mathcal{C}^1(C, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}^0(C, \mathbf{R}) \,; \ f \mapsto x_1 \partial_1 f + x_2 \partial_2 f$, ou abusivement x_i désigne, pour $i = 1, 2$ la i^{e} forme coordonnée dans la base canonique. L'application L est linéaire, par linéarité de la dérivation partielle, et donc <u>S_0 est un espace vectoriel</u>, en tant que noyau de L.

(d) L'application g est 2-homogène, donc par (1), donc

$$\frac{1}{2} g \in S_g.$$

(e) Soit $f \in \mathcal{C}^1(C, \mathbf{R})$, on a $f \in S_g$ si et seulement si $f - \frac{1}{2} g \in S_0$, donc :

$$\underline{S_h = \frac{1}{2} g + S_0}$$

(f) Par (1), $S_0 = H_0 \cap \mathcal{C}^1(C, \mathbf{R})$. Soit par ailleurs $\phi \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$; L'application

$$f \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ (x_1, x_2) \mapsto \phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Si ϕ est $\mathcal{C}^1$ alors comme $(x_1, x_2) \mapsto x_i$ est $\mathcal{C}^1$ pour $i = 1, 2$, les théorèmes de transfert assurent que f est $\mathcal{C}^1$.
Si f est $\mathcal{C}^1$, comme $\phi = f(1, \cdot)$ et que $t \mapsto (1, t)$ est $\mathcal{C}^1$, alors ϕ est $\mathcal{C}^1$. Donc

$$\underline{S_0 = \left\{\mathbf{C} \to \mathbf{R}\,(x, y) \mapsto \phi\left(\frac{y}{x}\right), \phi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})\right\}}.$$

6. (a) Soient $(x_1, x_2) \in C$ et $(r, \theta) \in U$.
Alors classiquement, comme $x_1 \neq 0$, on a $p(r, \theta) = (x_1, x_2)$ si et seulement si

$$\begin{cases} r = x_1^2 + x_2^2, \\ \tan\theta = \frac{x_2}{x_1}. \end{cases}$$

Or $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $p(r, \theta) = (x_1, x_2)$ si et seulement si

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \end{cases}$$

Donc <u>p est une bijection de U sur C.</u> et

$$p^{-1} \ : \ C \to U\,;\ (x_1, x_2) \mapsto \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right).$$

(b) La mythique rêgle de la chaîne assure que

$$\underline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = \cos\theta \partial_1 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta) + \sin\theta \partial_2 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta).}$$

(c) • Supposons que $f \in S_0$. Alors par (b), $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ soit nulle sur U.
• Supposons que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ soit nulle sur U, alors $x_1 \partial_1 f + x_2 \partial_2 f$ est nulle sur $p(U)$ donc sur C par *surjectivité* de p, et voilà donc f élément de S_0.
Notons $\tilde{S}_0 = \left\{g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}) / \frac{\partial g}{\partial r} = 0_{U \to \mathbf{R}}\right\}$.
On a déjà <u>$f \in S_0$ si et seulement si $f \circ p \in \tilde{S}_0$.</u>
Détermination de $\tilde{S}_0$.
• Soit $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$; supposons $g \in \tilde{S}_0$ alors pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'application $g(\cdot, \theta)$ est de dérivée, $\frac{\partial g}{\partial r}$, nulle sur *l'intervalle* $\mathbf{R}_+^*$ donc est constante. On dispose donc d'une application ψ de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbf{R}$ telle que por tout $(r, \theta) \in U$,

$$g(r, \theta) = \psi(\theta).$$

Comme $\psi = g(1, \cdot)$ et que g est $\mathcal{C}^1$, ψ est $\mathcal{C}^1$.
• Réciproquement pour tout $\psi \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbf{R}\right)$, l'application

$$(r, \theta) \ : \ U \to \mathbf{R}\,;\ \mapsto \psi(\theta)$$

est élément de $\tilde{S}_0$.

Conclusion

$$\begin{aligned} S_0 =&\{g \circ p^{-1}, g \in \tilde{S}_0\} \\ =&\left\{\mathbf{C} \to \mathbf{R}\,;\ (x_1,x_2) \mapsto \psi\left(\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right), \psi \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\mathbf{R}\right)\right\} \\ =&\underline{\left\{\mathbf{C} \to \mathbf{R}\,;\ (x_1,x_2) \mapsto \phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \phi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})\right\}}. \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte du caractère bijectif de arctan de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbf{R}$, donc de celui de

$$\mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\mathbf{R}\right) \to \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})\ ;\ \psi \mapsto \psi \circ \arctan.$$

PARTIE II. Applications harmoniques

1. L'ensemble des applications harmoniques d'un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ est un espace vectoriel car c'est le noyau de l'application linéaire

$$\mathcal{C}^2(U,\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^0(U,\mathbf{R})\,;\ f \mapsto \Delta(f),$$

(linéarité des dérivations partielles).

2. Fonctions harmoniques radiales

(a) • Supposons F de classe $\mathcal{C}^2$. Comme $(x_1,x_2) \mapsto x_i$ pour $i = 1,2$ $\sqrt{\cdot}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$, par produit, somme et composition d'applications $\mathcal{C}^2$, on a f de classe $\mathcal{C}^2$.

• Supposons f de classe $\mathcal{C}^2$; l'application $\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto (t^2,0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et pour tout réel $t > 0$, on a $F(t) = f(t^2,0)$, donc par composition de telles applications, F est $\mathcal{C}^2$.

Concluons : f est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si F est de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

(b) Pour tout élément (x_1,x_2) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} F'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} F'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right).$$

(c) Pour tout élément (x_1,x_2) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} F''\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - \frac{x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}}\right) F'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right),$$

soit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} F''\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) + \frac{x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}} F'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right).$$

De même,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = \frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2} F''\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) + \frac{x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}} F'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right).$$

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{x_2 x_1}{x_1^2 + x_2^2} F''\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) - \frac{x_2 x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} F'\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right).}$$

Remarque : f étant de classe $\mathcal{C}^2$, on a $\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}}(x_1, x_2)$, ce que redonne plus simplement ici la symétrie des rôles tenus par x_1 et x_2.

(d) Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$\Delta f(x_1, x_2) = F''\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} F'\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right).$$

Or l'application

$$\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbf{R}\ ;\ (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

induit une **surjection de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ sur $\mathbf{R}_+^*$**, donc Δf est nul si et seulement si pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$,

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) = 0,$$

autrement dit Δf est nul si et seulement si F' est solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation différentielle du premier ordre linéaire homogène

$$\underline{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{r} y.} \tag{2}$$

(e) (2) est une équation différentielle du premier ordre linéaire homogène, a est continue, L'ensemble de ses solutions sur $\mathbf{R}_+^*$ est donc la droite vectorielle engendrée par

$$\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\ ;\ r \mapsto \exp\left(\int_1^r a(s)\mathrm{d}s.\right).$$

Donc, dans le cas présent, l'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}_+^*$ de (2) est l'ensemble des applications de la forme

$$\underline{\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\ ;\ r \mapsto \frac{A}{r},}$$

où A est un réel quelconque.

(f) On a vu que Δf est l'application nulle sur $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ si et seulement si il existe un réel A tel que pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$, $F'(r) = \frac{A}{r}$, donc Δf est nul si et seulement si il existe des réels A et B tels que pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$, $F(r) = A \ln r + B$. Donc Δf est nul si et seulement si il existe des réels A et B tels que :

$$\underline{f\ :\ \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbf{R}\ ;\ (x, y) \mapsto A \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + B.}$$

Remarque :
Dans le cas général et pour n différent de 2, un calcul analogue montre que l'ensemble des applications de $\mathbf{R}^n - \{(0, \dots, 0)\}$ dans $\mathbf{R}$ radiales et de laplacien nul est l'ensemble des applications de la forme

$$\underline{f\ :\ \mathbf{R}^n - \{(0,0)\} \to \mathbf{R}\ ;\ (x, y) \mapsto \frac{A}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{n-2}} + B,}$$

où A et B sont des réels quelconques [1].

3. Fonctions harmoniques angulaires

On considère $\mathcal{P}$ le demi-plan ouvert de $\mathbf{R}^2$ d'équation $x_1 > 0$,

$$\mathcal{P} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, x_1 > 0\right\} = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}.$$

On définit la fonction G de $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{R}$ par

$$G \;:\; \mathcal{P} \to \mathbf{R}\,;\; (x_1, x_2) \mapsto \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

(a) Soit $(x_2, x_1) \in \mathcal{P}$.

$$\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_2, x_1) = \frac{1}{x_1}\frac{1}{1+\frac{x_2^2}{x_1^2}} = \frac{x_1}{x_2^2+x_1^2},\; \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2}(x_2, x_1) = x_1\frac{-2x_2}{(x_2^2+x_1^2)^2} = \frac{-2x_2x_1}{(x_2^2+x_1^2)^2},$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_2, x_1) = -\frac{x_2}{x_1^2}\frac{1}{1+\frac{x_2^2}{x_1^2}} = \frac{-x_2}{x_2^2+x_1^2},\; \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2}(x_2, x_1) = \frac{x_2.2x_1}{(x_2^2+x_1^2)^2} = \frac{2x_2x_1}{(x_2^2+x_1^2)^2}.$$

finalement $\Delta G = 0$ sur $\mathcal{P}$. <u>G est harmonique sur $\mathcal{P}$.</u>

(b) Soit φ une application $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. L'application $q \;:\; \mathcal{P} \to \mathbf{R}, (x_2, x_1) \mapsto \frac{x}{2x_1}$ est $\mathcal{C}^2$ (car rationnelle). Par composition f est de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $(x_2, x_1) \in \mathcal{P}$.

$$f(x_2, x_1) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2, x_1) = \frac{1}{x_1}\varphi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right),\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2, x_1) = \frac{1}{x_1^2}\varphi''\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_2, x_1) = \frac{-x_2}{x_1^2}\varphi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right),\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_2, x_1) = \frac{2x_2}{x_1^3}\varphi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{x_2^2}{x_1^4}\varphi''\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Donc :

$$\Delta f(x_2, x_1) = \frac{x_2^2+x_1^2}{x_1^4}\varphi''\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{2x_2x_1}{x_1^4}\varphi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Donc $\Delta f = 0$ si et seulement si, pour tout $(x_2, x_1) \in \mathcal{P}$,

$$\left(\frac{x_2^2}{x_1^2}+1\right)\varphi''\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{2x_2}{x_1}\varphi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = 0.$$

Première méthode : L'application q est surjective de $\mathcal{P}$ sur $\mathbf{R}$, donc f est harmonique sur $\mathcal{P}$ si et seulement si φ' est solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients continus :

$$(1+u^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} + 2ux = 0. \tag{3}$$

1. Pour $n = 3$ on retrouve les potentiels électrostatiques créés par une charge ponctuelle ou gravitationnels créés par une masse ponctuelle, placées en l'origine, Potentiels en « $1/r$ ». D'après le 4. pour un potentiel à symétrie radiale U, être en « $1/r$ »équivaut à satisfaire à l'équation de Poisson dans le vide $\Delta U = 0$.

Donc f est harmonique si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\varphi' \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; \ u \mapsto \frac{\lambda}{1+u^2}.$$

Donc f est harmonique si et seulement si il existe des réels λ et μ tels que

$$\underline{\varphi \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; \ u \mapsto \lambda.\arctan(u) + \mu.}$$

Notons que f est harmonique si et seulement si il existe des réels λ et μ tels que $f = \lambda G + \mu$.

Méthode plus rusée et plus concise : L'application q est surjective de $\mathcal{P}$ sur $\mathbf{R}$, donc en identifiant X^2 et l'application polynomiale associée, f est harmonique si et seulement si $((1+x_2^2)\varphi')' = 0$, soit, $\mathbf{R}$ étant un intervalle si et seulement si il existe des réels λ et μ tels que :

$$\underline{\varphi \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; \ u \mapsto \lambda.\arctan(u) + \mu.}$$

(c) L'application f est élément de S_2 si et seulement si, pour tout $(x_2, x_1) \in \mathcal{P}$,

$$\left(\frac{x_2^2}{x_1^2} + 1\right)\varphi''\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{2x_2}{x_1}\varphi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{x_2}{x_1},$$

soit, comme dans (b), si et seulement si pour tout réel u

$$((1+X^2)\phi')'(u) = u.$$

Donc f est élément de S_2 si et seulement si il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $u \in \mathbf{R}$

$$\phi'(u) = \frac{u^2}{2(1+u^2)} + \frac{a}{1+u^2} = \frac{1}{2} + \frac{a - \frac{1}{2}}{1+u^2},$$

et finalement f est élément de S_2 si et seulement si il existe $(b,c) \in \mathbf{R}^2$ tels que pour tout $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi(u) = \frac{1}{2}u + b\arctan(u) + c.$$

Conclusion : $\underline{S_2 = \left\{\mathcal{P} \to \mathbf{R}\,; \ (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_2}{2x_1} + bG(x_1,x_2) + c, (b,c) \in \mathbf{R}^2\right\}.}$