

## DM n°1

Ce très court DM est là pour attendre que de nouvelles notions soient traitées. Il utilise essentiellement des connaissances et des raisonnements de sup. Il est à rendre pour le 16 septembre.

## Exercice 1

Dans ce bel exercice, les variables aléatoires considérées sont toutes définies sur un même espace probabilisé<sup>1</sup>  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  et  $n$  désignera un entier naturel non nul.

On note  $(L_1, \dots, L_n)$  la base des polynômes d'interpolation de Lagrange pour le  $n$ -uplet de points  $(1, 2, \dots, n)$ ,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(j) = \delta_{i,j}.$$

1. Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\{1, \dots, n\}$ . Pour tout  $k \in \mathbf{N}$  on désigne par  $m_k$  le moment d'ordre  $k$  de  $X$  :

$$M_k = \mathbf{E}(X^k).$$

On se propose, dans cette question, de montrer de deux manières que la loi de  $X$  est entièrement déterminée par  $m_1, \dots, m_{n-1}$ . Autrement dit toute variable aléatoire ayant pour  $k = 1, \dots, n-1$ ,  $m_k$  comme moment d'ordre  $k$  suit la même loi que  $X$ . On remarquera que  $m_0 = 1$ .

- (a) Pour  $k = 1, 2, \dots, n$  déterminer l'espérance de la variable aléatoire  $\mathbf{1}_{X=k}$ .
- (b) Exprimer, pour  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\mathbf{1}_{X=k}$  au moyen de  $X$  et  $L_k$ .  
Conclure.
- (c) On considère  $G_X^*$  la fonction polynôme<sup>2</sup> :

$$G_X^* : t \mapsto \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = k)t^{k-1}.$$

Montrer que la loi de  $X$  est entièrement déterminée par  $G_X^*$  ; autrement dit, si une variable aléatoire  $Y$  vérifie  $G_X^* = G_Y^*$  alors elle suit la même loi que  $X$ .

- (d) Exprimer  $G_X^{*'}(1)$ ,  $G_X^{*''}(1)$  au moyen de  $m_1$  et  $m_2$ .
- (e) Montrer que pour  $k = 1, \dots, n-1$ , la fonction  $G_X^{*(k)}(1)$  s'exprime au moyen de  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$ . On ne demande pas d'expliciter cette relation.  
En déduire de nouveau le résultat.

2. Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

Montrer que  $A$  est de rang 1 si et seulement si il existe des matrices colonnes  $U$  et  $V$  éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  non nulles, telles que :

$$A = UV^\top.$$

---

1. Les 3/2 ne se formaliseront pas de cette clause légale, dont ils ne percevront le sens qu'en fin d'année, sans que ce soit de quelque façon une gêne.

2. Cette fonction est presque la fonction génératrice de  $X$  que l'on étudiera cette année.

On considère deux variables aléatoires à valeurs dans  $\{1, \dots, n\}$ . Pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $\{1, \dots, n\}$  on note

$$a_{i,j} = \mathbf{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$$

et on pose  $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ , élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

Pour  $j = 1, \dots, n$  on note  $C_j$  la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $A$  et pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $L_i$  sa  $i^{\text{e}}$  ligne.

3. On se propose de montrer que  $A$  est de rang 1 si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes.

(a) On suppose  $X$  et  $Y$  indépendantes. Montrer que le rang de  $A$  est 1.

On suppose à présent que  $\text{rg}(A) = 1$ .

(b) Posons  $U = C_1 + \dots + C_n$ . Exprimer les composantes de  $U$  au moyen de  $X$ .

(c) Montrer qu'il existe des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que pour  $i = 1, \dots, n$ ,

$$C_i = \alpha_i U$$

(d) Exprimer  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  au moyen de  $Y$ .

On pourra considérer la somme des lignes  $L_1, \dots, L_n$ .

(e) Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

4. Pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $\{1, \dots, n\}$  on note

$$b_{i,j} = \mathbf{E}(X^{i-1}Y^{j-1})$$

et on pose  $B = (b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ , élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

Pour  $j = 1, \dots, n$  on note  $C'_j$  la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $B$  et pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $L'_i$  sa  $i^{\text{e}}$  ligne.

On se propose de montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si  $B$  est de rang 1.

(a) On suppose  $X$  et  $Y$  indépendantes. Montrer que le rang de  $B$  est 1.

On suppose dans la suite que le rang de  $B$  est 1.

(b) Montrer qu'il existe des réels  $\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$  tels que pour  $j = 0, \dots, n-1$  et  $i = 0, \dots, n-1$ ,

$$\mathbf{E}(X^i Y^j) = \alpha'_j \mathbf{E}(X^i).$$

(c) Montrer :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{E}(X^i Y^j) = \mathbf{E}(X^i) \mathbf{E}(Y^j).$$

(d) Montrer que pour  $j = 1, \dots, n$  et  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\mathbf{E}(L_i(X) L_j(Y)) = \mathbf{E}(L_i(X)) \mathbf{E}(L_j(Y)).$$

En déduire l'indépendance de  $X$  et  $Y$ .

## Exercice 2

Soit un espace euclidien  $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  de dimension non nulle  $n$ .

1. Soient  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$  des vecteurs de  $\mathbf{E}$  unitaires.

Nous nous proposons de montrer qu'il existe des éléments  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$  de  $\{-1, 1\}$  tels que :

$$\left\| \sum_{i=1}^p \varepsilon_i \vec{v}_i \right\| \leq \sqrt{p}.$$

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_p$  des variables de Rademacher<sup>3</sup> indépendantes. On pose  $R$  la variable aléatoire

$$R = \left\| \sum_{i=1}^p X_i \vec{v}_i \right\|^2.$$

En étudiant l'espérance de  $R$  conclure.

2. On considère à présent  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$  des vecteurs de  $\mathbf{E}$  de norme inférieure ou égale à 1. Soient  $q_1, \dots, q_p$  des éléments de  $[0, 1]$ , on pose

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^p q_i \vec{u}_i.$$

$\vec{v}$  est un vecteur du parallélépipède  $\mathcal{P}$  construit sur les  $\vec{v}_i$ , du moins lorsque  $n \geq p$ . Pour toute partie  $I$  de  $\{1, \dots, p\}$ , on pose

$$\vec{v}_I = \sum_{i \in I} \vec{u}_i,$$

les  $\vec{v}_I$  sont les sommets du parallélépipède  $\mathcal{P}$ .

Nous allons montrer : *il existe un sommet de  $\mathcal{P}$  distant de  $\vec{v}$  de moins de  $\frac{\sqrt{n}}{2}$ .*

On considère  $p$  variables de Bernoulli  $X_1, \dots, X_p$  indépendantes et la variable aléatoire

$$S = \left\| \sum_{i=1}^p X_i \vec{u}_i - \vec{v} \right\|^2.$$

En choisissant astucieusement le paramètre de chaque variable  $X_i, i = 1, \dots, p$ , conclure.

### Exercice 3 FACULTATIF

Par  $n$  on désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $E_n$  désigne l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ . On appelle *antichaîne* de  $\mathbf{E}_n$  toute partie  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{P}(E_n)$  telle que pour tout couple  $(A, B)$  d'éléments distincts de  $\mathcal{A}$ ,  $A$  ne soit pas inclus dans  $B$ .

1. Soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Déterminer une antichaîne de cardinal  $\binom{n}{k}$ . Pour quelle valeur de  $k$  est-elle de cardinal maximum ?
2. On se propose de montrer le résultat suivant (Sperner 1928, preuve probabiliste de Lubell 1966) :

*Le cardinal d'une antichaîne de  $E_n$  est au plus  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .*

---

3. Une variable de Rademacher est une variable qui prend la valeur  $-1$  avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  et la valeur  $1$  avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ , elle modélise par exemple un jeu de pile ou face équitable ou le joueur empoche deux fois la mise s'il gagne et dans tous les cas laisse sa mise.

- (a) Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $\mathcal{P}(E_n)$ . On munit  $S_n$  de la probabilité  $\mathbf{P}$  uniforme. Pour tout  $\sigma \in S_n$  on considère la chaîne  $C_\sigma$  :

$$C_\sigma = \left\{ \emptyset, \{\sigma(1)\}; \{\sigma(1), \sigma(2)\}, \dots, \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} \right\}.$$

On définit sur  $S_n$  la variable aléatoire  $X$  qui à un élément  $\sigma$  de  $S_n$  associe le cardinal de  $C_\sigma \cap \mathcal{A}$  et pour tout  $A$  de  $\mathcal{A}$ ,  $X_A$  est la variable aléatoire indicatrice de l'événement  $A \in C_\sigma$ .

Déterminer pour tout élément de  $\mathcal{A}$  la loi de  $X_A$  et son espérance.

- (b) Exprimer  $X$  en fonction des  $X_A$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . En déduire le lemme de Sperner.

## Correction du DM n°1

## Exercice 1

1. (a) Soit
- $k \in \{1, \dots, n\}$
- .

$$E(\mathbf{1}_{X=k}) = 1 \times \mathbf{P}(\mathbf{1}_{X=k} = 1) = \underline{\mathbf{P}(X = k)}.$$

Soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

- (b) Soit
- $\omega \in \Omega$
- . Comme
- $X(\omega) \in \{0, \dots, n\}$
- ,
- $L_k(\omega) \subset \{0, 1\}$
- et
- $L_k(X)(\omega) = 1$
- si et seulement si
- $X(\omega) = k$
- , soit si et seulement si
- $\mathbf{1}_{X=k}(\omega) = 1$
- .

Conclusion :  $\underline{\mathbf{1}_{X=k} = L_k(X)}$ .

Donc :

$$\mathbf{P}(X = k) = E(\mathbf{1}_{X=k}) = E(L_k(X))$$

donc par linéarité de l'espérance et comme  $\deg(L_k) \leq n - 1$ ,

$$\mathbf{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j E(X^j) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j m_j, L_k$$

La loi de  $X$  est donc déterminée par les moments d'ordre 1 à  $n - 1$ .

- (c)
- La loi de  $X$  est entièrement déterminée par  $G_X^*$ , puisque  $p(X = k)$  est, pour  $k = 1, \dots, n$  LE coefficient de degré  $k - 1$ .
- 
- (d) La formule de transfert nous dit que :

$$\begin{aligned} G_X^{*'}(1) &= \sum_{k=2}^n (k-1) \mathbf{P}(X = k) 1^{k-2} = \sum_{k=1}^n (k-1) \mathbf{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n (k) \mathbf{P}(X = k) - \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = k) = \boxed{m_1 - 1}. \end{aligned}$$

Et de même,

$$\begin{aligned} G_X^{*''}(1) &= \sum_{k=3}^n (k-1)(k-2) \mathbf{P}(X = k) 1^{k-3} = \sum_{k=1}^n (k-1)(k-2) \mathbf{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 3k + 2) \mathbf{P}(X = k) = \boxed{m_2 - 3m_1 + 2}. \end{aligned}$$

- (e) Soit
- $k \in \{1, \dots, n - 1\}$
- . Notons
- $Q_k$
- le polynôme
- $(T - 1)(T - 2) \dots ((T - 1) - k + 1)$
- avec
- $T$
- l'indéterminée (
- $X$
- est déjà pris) et notons que
- $Q_k$
- est unitaire de degré
- $k$
- , ce qui autorise à le noter
- $Q_k = a_{k+1}T^k + a_{k-1}T^{k-1} + \dots + a_0$
- .

$$\begin{aligned}
G_X^{*k}(1) &= \sum_{j=k+1}^n (j-1)(j-2)\dots((j-1)-k+1)\mathbf{P}(X=j)1^{j-1-k} \\
&= \sum_{j=1}^n (j-1)(j-2)\dots((j-1)-k+1)\mathbf{P}(X=j) \\
&= \sum_{j=1}^n Q_k(j)\mathbf{P}(X=j) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{p=0}^k a_p j^p \right) \mathbf{P}(X=j) \\
&= \sum_{p=0}^k a_p \left( \sum_{j=1}^n j^p \mathbf{P}(X=j) \right) \\
&= \boxed{\sum_{p=0}^k a_p m_p}.
\end{aligned}$$

Or la formule de *Taylor au point 1* assure que  $G_X^*$  — polynôme de degré  $n-1$  est entièrement déterminée par  $G_X^{*0}(1), G_X^{*1}(1), \dots, G_X^{*n-1}(1)$ , donc par  $m_0, m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ . Par (c), et puisque  $m_0 = 1$ , la loi de  $X$  est entièrement déterminée  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ .

$$\begin{aligned}
G_X^{*k}(1) &= \sum_{j=k+1}^n (j-1)(j-2)\dots((j-1)-k+1)\mathbf{P}(X=j)1^{j-1-k} \\
&= \sum_{j=1}^n (j-1)(j-2)\dots((j-1)-k+1)\mathbf{P}(X=j) \\
&= \sum_{j=1}^n Q_k(j)\mathbf{P}(X=j) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{p=0}^k a_p j^p \right) \mathbf{P}(X=j) \\
&= \sum_{p=0}^k a_p \left( \sum_{j=1}^n j^p \mathbf{P}(X=j) \right) \\
&= \boxed{\sum_{p=0}^k a_p m_p}.
\end{aligned}$$

Or la formule de *Taylor au point 1* assure que  $G_X^*$  — polynôme de degré  $n-1$  est entièrement déterminée par  $G_X^{*0}(1), G_X^{*1}(1), \dots, G_X^{*n-1}(1)$ , donc par  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$ .

Par (c), et puisque  $m_0 = 1$ , la loi de  $X$  est entièrement déterminée  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ .

2. Notons  $A$  en colonnes :  $A = (C_1 \mid C_2 \mid \dots \mid C_n)$ .

- Supposons qu'il existe des matrices colonnes  $U$  et  $V$  éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ , telles que :  $A = UV^\top$ .

Alors pour  $j = 1, \dots, n$ , on a  $C_j = v_j U$  donc  $\text{vect}(C_1, \dots, C_n) \subset \text{vect}(U)$ .

donc le rang de  $A$  est au plus 1 ; mais comme  $U$  et  $V$  sont non nuls on dispose de  $i$  et  $j$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$  tels que  $u_i \neq 0$  et  $v_j \neq 0$  et donc  $a_{i,j} = u_i v_j \neq 0$ .

Donc  $\text{rg}(A) = 1$ .

- Supposons que le rang de  $A$  soit 1. Notons  $U$  un vecteur directeur de la droite  $\text{vect}(C_1, \dots, C_n)$ . On dispose de réels  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tels que pour  $j = 1, \dots, n$

$$C_j = v_j U.$$

Mais alors, en posant  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^\top$ , on a  $\underline{A} = UV^\top$ .

D'où l'équivalence demandée.

3. (a) Par *indépendance* de  $X$  et  $Y$ ,

$$\underline{A} = (\mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = j))_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} = UV^\top,$$

avec  $U = (\mathbf{P}(X = 1), \dots, \mathbf{P}(X = n))^\top$  et  $V = (\mathbf{P}(Y = 1), \dots, \mathbf{P}(Y = n))^\top$ , les vecteurs  $U$  et  $V$  unitaires pour la norme 1 sont non nuls.

(b) Pour  $i = 1, \dots, n$ , comme  $(\{Y = 1\}, \dots, \{Y = n\})$  est un *systemème complet d'événements*,

$$u_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \mathbf{P}(X = i).$$

$$\underline{U} = (\mathbf{P}(X = 1), \dots, \mathbf{P}(X = n))^\top.$$

(c)  $U$  est un vecteur *non nul*, puisque unitaire pour la norme 1, de  $\text{vect}(C_1, \dots, C_n)$  qui est une droite, donc pour  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\underline{C}_i = \alpha_i U,$$

où  $\alpha_i$  est la coordonnée de  $C_i$  dans la base  $(U)$ .

(d) le raisonnement de (b) en échangeant les rôles de  $X$  et  $Y$  et des lignes et des colonnes livre :

$$L_1 + L_2 + \dots + L_n = (\mathbf{P}(Y = 1), \dots, \mathbf{P}(Y = n)).$$

Mais par ailleurs, comme  $\|U\|_1 = 1$ ,

$$L_1 + L_2 + \dots + L_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Donc pour  $j = 1, \dots, n$ , on a  $\underline{\alpha}_j = \mathbf{P}(Y = j)$ .

(e) Par (d),

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \mathbf{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = a_{i,j} = \mathbf{P}(X = i)\alpha_j = \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = j),$$

ce qui par définition assure que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

4. (a) L'indépendance de  $X$  et  $Y$  s'étend par le lemme de coalition à  $X^{i-1}$  et  $Y^{i-1}$  pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $[1, n]$ , de sorte que

$$\underline{E}(X^{i-1}Y^{i-1}) = \underline{E}(X^{i-1})\underline{E}(Y^{i-1}).$$

Donc

$$B = \begin{pmatrix} \underline{E}(X^0) \\ \underline{E}(X^1) \\ \vdots \\ \underline{E}(X^{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E}(Y^0) \\ \underline{E}(Y^1) \\ \vdots \\ \underline{E}(Y^{n-1}) \end{pmatrix}^\top,$$

et donc par 2, le rang de  $B$  est 1 (notons que  $\underline{E}(X^0)\underline{E}(Y^0) = 1 \neq 0$ ).

- (b) La première colonne est  $(1, E(X^1), \dots, E(X^{n-1}))^\top$ . Comme le rang de  $B$  est 1, la  $j^{\text{e}}$  colonne est, pour  $j = 1, \dots, n$  proportionnelle à la première, en notant  $\alpha'_{j-1}$  la constante de proportionnalité : pour  $j = 0, \dots, n-1$  et  $i = 0, \dots, n-1$

$$E(X^i Y^j) = \alpha'_j E(X^i),$$

(notons que  $\alpha'_0 = 1$ ).

- (c) Mais la première ligne de  $B$  est :

$$(1, E(Y_1), \dots, E(Y_{n-1})),$$

mais aussi

$$(1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-1}).$$

Donc par (b),

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket, E(X^i Y^j) = \alpha'_j E(X^i) = E(X^i) E(Y^j).$$

Donc par (b),

- (d) Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Décomposons  $L_i$  et  $L_j$  dans la base canonique  $(T^0, T^1, \dots)$  :

$$L_i = \sum_{p=0}^{n-1} a_p T^p; \quad L_j = \sum_{q=0}^{n-1} b_q T^q.$$

Alors par une double application de linéarité de l'espérance et (c),

$$\begin{aligned} E(L_i(X)L_j(Y)) &= E\left(\sum_{(p,q) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} a_p b_q X^p Y^q\right) = \sum_{(p,q) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} a_p b_q E(X^p Y^q) = \\ &= \sum_{(p,q) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} a_p b_q E(X^p) E(Y^q) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p E(X^p) \sum_{q=0}^{n-1} b_q E(Y^q) = \\ &= E\left(\sum_{p=0}^{n-1} a_p X^p\right) E\left(\sum_{q=0}^{n-1} b_q Y^q\right) = E(L_i(X)) E(L_j(Y)). \end{aligned}$$

En raisonnant comme dans 1., cette égalité s'écrit :

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i) \mathbf{P}(Y = j).$$

Comme  $i$  et  $j$  sont des valeurs quelconques de  $X$  et de  $Y$ , On a l'indépendance de  $X$  et  $Y$ .

À ce stade le degré de justification de notre réponse est suffisant, détaillons cependant l'égalité :

$$E(L_i(X)L_j(Y)) = \mathbf{P}(X = i, Y = j)$$

Par la formule de transfert

$$\begin{aligned} E(L_i(X)L_j(Y)) &= \sum_{((h,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2)} L_i(h)L_j(k) \mathbf{P}((X, Y) = (h, k)) \\ &= L_i(i)L_j(j) \mathbf{P}((X, Y) = (i, j)) = \mathbf{P}(X = i, Y = j). \end{aligned}$$