

# Programme de colles n°1

## 1 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

- Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
- Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
- à venir : semaine prochaine formes linéaires, hyperplans
- Matrices :
  - Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme.
  - Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
- *Semaine prochaine diagonalisation, trigonalisation, (point de vue géométrique et pratique) et révisions de probabilités de sup.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque  $\star$  pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques  $\star\star$  Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

## 2 Questions de cours

1. Théorème du rang : l'image d'une application linéaire est isomorphe à un supplémentaire du noyau, application si  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{F}'$  sont des supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel alors ils sont isomorphes (p. 40).
2. Tout élément de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  de rang  $r$  est équivalent à la matrice  $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$  (Preuve algébrique cette semaine) .
3. Polynômes d'interpolation : existence unicité puis expression (page 42).

## 3 Récitation d'exercices

1. Soit  $\ell$  une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  montrer l'équivalence des deux propositions
  - (a) Pour tout  $A$  et tout  $B$  éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ,  $\ell(AB) = \ell(BA)$  ;
  - (b) Il existe  $k \in \mathbf{R}$  tel que  $\ell = k \text{tr}$ .
2. Montrer que des éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , semblables comme éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  sont semblables comme éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .
3.  $\star$  Même question pour équivalents. On donnera une preuve par densité algébrique, une utilisant les opérations élémentaires, et une le déterminant.
4. — THÉORÈME D'HADAMARD —

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , tel que pour  $i = 1, 2, \dots, n$

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1,\dots,n, \\ j \neq i}} |a_{i,j}|.$$

Montrer que  $A$  est inversible.

5. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $\mathbf{E}$  tel que pour tout élément  $\vec{x}$  de  $\mathbf{E}$ ,  $(\vec{x}, u(\vec{x}))$  soit lié. Montrer que  $u$  est une homothétie. En déduire le centre de  $\text{GL}(\mathbf{E})$ .
6. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Etudier le rang de  $\text{com}(M)$  en fonction de celui de  $M$ . Déterminer  $\det(\text{com}(M))$  et  $\text{com}(\text{com}(M))$ .

Retrouver ces résultats par densité algébrique sans discuter sur le rang de  $M$ .

7.  $\star \mathbf{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne canonique. Pour toute permutation  $\sigma$  élément de  $S_n$ , on note  $P_\sigma$  la matrice de permutation associée à  $\sigma$ . On pose :

$$P := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} P_\sigma.$$

- (a) Montrer que l'endomorphisme  $p$  de  $\mathbf{R}^n$  associé canoniquement à  $P$  est une projection dont on déterminera l'image et le noyau.  
 (b) Montrer que  $p$  est orthogonale.  
 (c) On munit  $S_n$  d'une probabilité uniforme et l'on désigne par  $X$  la variable aléatoire qui à  $\sigma$  élément de  $S_n$  associe le nombre de points fixes de  $\sigma$ . Calculer l'espérance de  $X$ .
8. Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Montrer que l'ensemble  $E$ , défini par

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), AMA = 0_n\},$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  dont on précisera la dimension en fonction du rang de  $A$ .

9.  $\star\star$  — THÉORÈME DE FROBENIUS-ZOLOTOREV — Soit  $f$  une application de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  dans  $\mathbf{C}$  continue telle que :

- i.  $f(I_n) = 1$  ;  
 ii. pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$ ,  $f(AB) = f(A)f(B)$ .

Montrer qu'il existe une application  $g$  de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}$  continue vérifiant  $g(1) = 1$  et  $g(ab) = g(a)g(b)$  pour tout couple  $(a, b)$  de complexes, telle que :

$$f = g \circ \det.$$

10. Effet de la multiplication à droite ou à gauche par une transvection, inverse d'une transvection.  
 11.  $\star$  Montrer que tout élément de  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$  est un produit de matrices de transvection.  
 12.  $\star\star$  Déterminer les éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  dont la classe de similitude est bornée.

## Programme de colles n°2

---

### 4 Révisions de probabilités de sup.

- Probabilités sur un ensemble fini.
- Variables aléatoires.

### 5 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par  $\mathbf{K}$  on désigne  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$

- Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômes à  $p$  variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
- Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
- Formes linéaires, hyperplans.
- Matrices :
  - Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme. Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
  - Opérations sur les lignes et colonnes.
- Diagonalisation. (*il s'agit d'une première approche géométrique axée sur la pratique, les applications le polynôme caractéristique. Un prochain chapitre traitera des polynômes d'endomorphismes et des questions subtiles de réduction*)
 

On désigne  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbf{K}$  espace vectoriel  $\mathbf{E}$  de dimension finie non nulle. On note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ , d'ordre de multiplicité respectifs  $m_1, m_2, \dots, m_k$ .

  - Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
  - Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
- *A venir : révisions sur les déterminants, critère de diagonalisabilité, trigonalisation, ...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque  $\star$  pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwenolé Traon, Alex Zeitler.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques  $\star\star$  Gwenolé Traon, Alex Zeitler.

### 6 Questions de cours

1. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont indépendants.
2. Polynôme caractéristique : polynomialité et coefficients remarquables.

### 7 Exercices

1. Déterminer les couples d'applications de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $(\varphi, \psi)$  tels que :

$$\begin{cases} \varphi' = 6\varphi + 4\psi, \\ \psi' = 11\varphi - \psi, \end{cases}, \quad (1)$$

2. Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{E}$  de dimension  $n$  non nulle. Pour tout entier  $n \geq 1$  on pose  $N_n = \text{Ker}(f^n)$  et  $I_n = \text{Im}(f^n)$ . Montrer qu'il existe un entier  $n_0 \geq 1$  tel que :

$$N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \dots \subsetneq N_{n_0} = N_{n_0+1} = \dots = N_n = \dots$$

$$I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \dots \supsetneq I_{n_0} = I_{n_0+1} = \dots = I_n = \dots$$

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Montrer que  $I_n = I_{n+1}$  si et seulement si  $I_n + N_n = I_n \oplus N_n$ , (cf. TD 1).

$\star$  Montrer la décroissance de la suite  $(\dim(N_{i+1}) - \dim(I_{i+1}))_{i \in \mathbf{N}}$ .

3. Soient  $A$  et  $B$  des éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . Montrer  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ , 1. par densité algébrique, 2. en utilisant l'équivalence de  $A$  à  $J_{\text{rg}(A)}$ .
4. ★ Montrer que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  rencontre  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ .
5. Soit  $V$  une variable aléatoire définie sur un univers (fini)  $\Omega$ , à valeurs dans  $\{0, \dots, n\}$ .  
Montrer que l'espérance de  $X$  est donnée par la formule

$$E(V) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(V \geq i).$$

Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires définies sur  $\Omega$ , indépendantes et qui suivent la loi uniforme sur  $\{0, \dots, n\}$ . Calculer  $E(\min(X, Y))$ .

6. Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi, définies sur un même univers fini  $\Omega$ , et  $T$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $X_1, \dots, X_n, T$  soient mutuellement indépendantes.  
On définit alors la variable aléatoire  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_T$ .
  - (a) Montrer que  $E(S) = E(T)E(X_1)$ .
  - (b) ★ Donner une formule analogue pour  $V(S)$ .  
*à suivre...*

7. Soit une suite de variables aléatoires de Rademacher  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  mutuellement indépendantes et toutes définies sur un même espace probabilisé. Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et l'on désigne par  $S_0$  une variable aléatoire qui prend la valeur 0 avec la probabilité 1.
  - (a) Montrer que la série  $\sum \mathbf{P}(S_{2^p} = 0)$  diverge.
  - (b) Soit la variable aléatoire  $R$  à valeurs dans  $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ , définie par :

$$R = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{S_n=0},$$

- (c) Montrer que  $\mathbf{P}(R = +\infty) = 1$ . Interpréter.
8. (a) Par  $K$  on désigne  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  (ou même tout corps). Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  de trace nulle. Montrer que  $A$  est semblable à une matrice de diagonale nulle.
  - (b) ★ Pour tout couple  $(B, C)$  d'éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , on note  $[BC] = BC - CB$  (crochet de lie de  $B$  et  $C$ ). Montrer qu'il existe des matrices  $B$  et  $C$  telles que  $BC - CB = A$ .

#### 9. FORME DE JORDAN

Notons pour tout entier  $k \geq 2$ ,  $J_k$  l'élément de  $\mathcal{M}_k(\mathbf{C})$  qui n'a que des 1 sur la sous-diagonale et des zéros partout ailleurs. et convenons que  $J_1 = O_1$ .

Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , nilpotent d'ordre  $p$ .

- (a) Montrer pour  $p = n$  que  $M$  est semblable à  $J_n$ .
  - (b) ★ On suppose que  $p = 2$ . Montrer que  $M$  est semblable à  $\text{diag}(\underbrace{J_2, J_2, \dots, J_2}_r, 0_{n-2r})$ , où  $r = \text{rg}(M)$
  - (c) ★ ★ Montrer dans le cas général que  $\text{Im}(u)$  est stable par  $u$ . En déduire qu'il existe un entier naturel  $k \geq 1$ , un élément  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  de  $(\mathbf{N}^*)^k$  vérifiant :  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k$ , et  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$ , tel que  $M$  soit semblable à la matrice  $\text{diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \dots, J_{\alpha_k})$ .
  - (d) ★ ★ Etudier l'unicité d'une telle décomposition.
10. ★ ★ On muni  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  de la norme euclidienne canonique  $\|\cdot\|$ . Déterminer les éléments  $P$  de  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$  tels que pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ,

$$\|PMP^{-1}\| = \|\Phi(M)\|.$$

11. ★ ★ Soit un entier  $n \geq 1$  Déterminer  $k$  maximal tel qu'il existe  $E_1, E_2, \dots, E_k$  parties de  $\{1, \dots, n\}$  vérifiant
  - i. le cardinal de  $E_i$  est impair pour  $i = 1, \dots, n$  ;
  - ii. le cardinal de  $E_i \cap E_j$  est pair pour tout couple d'éléments distincts de  $\{1, \dots, n\}$ .

## Programme de colles n°3,

---

### 8 Révisions de sup.

- Déterminants, applications et calculs

### 9 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par  $\mathbf{K}$  on désigne  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$

- Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômiales à  $p$  variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
- Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
- Formes linéaires, hyperplans.
- Matrices : Voir programme précédent.
- Diagonalisation. On désigne  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbf{K}$  espace vectoriel  $\mathbf{E}$  de dimension finie non nulle. On note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ , d'ordre de multiplicité respectifs  $m_1, m_2, \dots, m_k$ .
  - Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
  - Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
  - Diagonalisation des matrices et des endomorphismes. Définition. l'endomorphisme  $u$  diagonalisable si et seulement si  $\bigoplus_{i=1}^k \mathbf{E}_k = \mathbf{E}$ . La dimension d'un espace propre est inférieur à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée. l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_u$  est scindé et  $m_i = \dim(\mathbf{E}_i)$ , pour  $i = 1 \dots k$ .
  - Trigonalisation, un endomorphisme ou une matrice est trigonalisable si et seulement si leur polynôme caractéristique est scindé. Application à la résolution de systèmes différentiels et de systèmes de relations de récurrences linéaires.
  - Matrices nilpotentes, définition, une matrice est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable à valeurs propres nulles.
  - *A venir : espace vectoriels normés...*

**Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennoél Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noha Tusch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even.**

**Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwennoél Traon, Alex Zeitler.**

### 10 Questions de cours

1. Un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  d'un espace vectoriel de dimension fini est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbf{K}$ . Au choix du colleur, l'hérité se fera par les endomorphismes ou par les matrices en blocs.
2. Déterminants en blocs.

### 11 Exercices

1. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. Dans le cas où son polynôme caractéristique est scindé, montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si ses valeurs propres sont simples.
2. Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  ayant  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes.
  - (a) Montrer qu'un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  commute avec  $A$  si et seulement si toute base qui diagonalise  $A$  diagonalise  $M$ .

(b) Détermine l'ensemble  $E$  où :

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}), M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) En utilisant (a) déterminer le centre de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de ce groupe qui commutent avec tous les autres.

### 3. COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME

(a) Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  ayant  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que l'ensemble  $C(A)$  des matrices éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  qui commutent avec  $A$  est un espace vectoriel dont on précisera la dimension. Montrer que tout élément de  $C(A)$  est un polynôme en  $A$ .

(b) ★ Même question pour une matrice compagnon (en colonne)

(c) ★ Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  ayant  $k$  valeurs propres deux à deux distinctes avec  $k < n$  et diagonalisable. Déterminer la dimension de  $C(A)$ . Une matrice de  $C(A)$  est-elle un polynôme en  $A$ .

4. On note les éléments de  $\mathbf{R}^3$  en colonne. Déterminer les éléments  $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \\ \psi \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3)$  tels que

$$\begin{cases} 2\phi' = \phi + \chi + 2\psi, \\ 2\chi' = \phi + \chi - 2\psi, \\ 2\psi' = -\phi + \chi + 4\psi, \end{cases}$$

5. Déterminer les valeurs propres de la matrice  $L$  suivante. Est-elle diagonalisable ?

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Même question pour l'élément  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , dont tous les coefficients diagonaux valent  $a$  et tous les autres  $b$ .

6. Soient  $n$  un entier strictement positif et  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Pour  $n = 3$ , montrer que pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , il existe une matrice triangulaire supérieure  $(t_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ , semblable à  $M$ , telle que pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments distincts de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $|t_{i,j}| \leq \varepsilon$ .

★ Montrer le résultat pour  $n$  quelconque.

7. Soient  $z_1, z_2, \dots, z_n$  des nombres complexes, et  $P$  le polynôme

$$P = (X - z_1)(X - z_2) \dots (X - z_n)$$

On suppose que  $P$  est à coefficients entiers. Soit un entier  $q \geq 2$ . Montrer que

$$Q = (X - z_1^q)(X - z_2^q) \dots (X - z_n^q)$$

est à coefficients entiers.

8. ★ — THÉORÈME DE KRONECKER — Montrer que si  $P$  est un polynôme unitaire de  $\mathbf{Z}[X]$  dont les racines complexes sont toutes de module inférieur ou égal à 1 tel que  $P(0) \neq 0$ , alors toutes les racines de  $P$  sont des racines de l'unité.

9. ★★ Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . On considère l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ,

$$\Psi_A : X \mapsto AXA.$$

(a) Montrer que  $\Psi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est diagonalisable.

(b) En supposant  $A$  réelle, montrer que l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  induit par  $\Psi_A$  est une isométrie pour la norme euclidienne canonique, si et seulement si  $A$  est orthogonale.

10. ★★ Soit  $\mathbf{E}$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Que peut on dire d'un endomorphisme  $u$  qui laisse stable tous les sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  ?

## Programme de colles n°4

---

### 12 Algèbre linéaire : révision de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

— Programme de la semaine précédente.

### 13 Espaces vectoriels normés

*Il s'agit d'un premier contact...*

- Définition de norme, espace vectoriel normé, distance à une partie non vide.
- Ouverts, fermés, intérieur, adhérence. Ouverts et fermés relativement à une partie.
- Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé, convergence d'une suite à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés. Caractérisation de l'adhérence par les suites, caractérisation des fermés et des fermés relatifs par les suites.
- Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
- *A venir : limite des applications, compacité...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennoél Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noha Tusch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwennoél Traon, Alex Zeitler.

### 14 Questions de cours

1. Soit  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$  un e.v.n.,  $X$  un ensemble non vide. Montrer que  $N_\infty : \mathcal{B}(X, \mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{R}; f \mapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|$  est une norme.
2. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3. Caractérisation de l'adhérence par les suites. Caractérisation d'un fermé par les suites.

### 15 Récitation d'exercices

1. Montrer que la distance à une partie  $A$  non vide d'un e.v.n.  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$  est 1-lipschitzienne de  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$  dans  $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ . Montrer que la distance d'un élément  $\vec{x}$  de  $\mathbf{E}$  à  $A$  est nulle si et seulement si  $\vec{x}$  est adhérent à  $A$ .
2. Soient  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, \dots, b_n)$  des  $n$ -uplet de réels positifs. Soient  $p$  et  $q$  des réels tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  
(a) On admet que pour tout  $a$  et tout  $b$  réels positifs,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ (inégalité de Young).}$$

(b) Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Que dire du cas  $p = q = 2$  ?

- (c) Montrer que,  $n_p$  est une norme sur  $\mathbf{K}^n$ .
3. On note  $\mathbf{E}$  l'espace vectoriel  $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$ . Soit un réel  $p > 1$ . On admet que  $n_p$  est une norme sur  $\mathbf{R}^n$ . Montrer que

$$N_p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}_+; f \mapsto \left( \int_a^b |f(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur  $\mathbf{E}$ .

4. Montrer que pour tout élément  $f$  de  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ ,  $N_p(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} N_\infty(f)$ .

Ou version  $\star$

Soient  $\phi$  et  $f$  des applications de  $[a, b]$  dans  $\mathbf{R}$  continues. On suppose  $\phi$  à valeurs dans  $\mathbf{R}_+^*$  et  $f$  à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$ . On pose pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $I_n = \int_{[a, b]} \phi f^n$ .

- (a) Montrer que la suite  $(\sqrt[n]{I_n})_{n \in \mathbf{N}}$  converge de limite à déterminer.  
 (b) Montrer que la suite  $(\frac{I_{n+1}}{I_n})_{n \in \mathbf{N}}$  converge de limite à déterminer.
5. Soit  $G$  un sous-groupe de  $\mathbf{R}$  non trivial. Montrer que, soit il est de la forme  $k\mathbf{Z}$ , avec  $k$  élément de  $\mathbf{R}_+^*$ , soit il est dense dans  $(\mathbf{R}, |\cdot|)$  (on discutera sur la valeur de  $\inf(G \cap \mathbf{R}_+^*)$ ).
6.  $\star$  Soit  $\mathbf{E}$  l'ensemble des applications de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$  continues, muni de la norme  $N_1$  (resp.  $N_\infty$ ). Soit  $F$  l'ensemble des éléments de  $\mathbf{E}$  qui prennent en 0 la valeur 1. Quelle est l'intérieur de  $F$ ? Quelle est l'adhérence de  $F$ ? *L'étudiant fera de jolies figures claires et en couleur.*
7. Soit  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Montrer que tout sous-espace vectoriel propre de  $\mathbf{E}$  est d'intérieur vide. Montrer que l'adhérence d'un sous espace vectoriel est un sous espace vectoriel.
8.  $\star$  On munit  $\ell^\infty$  ensemble des suites réelles bornées de la norme  $N_\infty$ . On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des suites réelles ultimement nulles (polynômes). Déterminer l'adhérence de  $\mathcal{P}$ .

RÉVISION —

9. Soit  $A$  et  $B$  des éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Montrer qu'elles sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .
10.  $\star$  Soit  $A$  et  $B$  des éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$  semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Montrer qu'elles sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ .
11. Soit  $A$  une matrice stochastique d'ordre  $n$ , c'est-à-dire un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  à coefficient strictements positifs et tel que la somme des coefficients de n'importe quelle colonne fasse 1 :
- (a) Montrer que  $1 \in \text{sp}(A)$  et  $\text{sp}(A)$  est inclus dans le disque fermé unité de  $\mathbf{C}$ .  
 (b) Soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $A$ . Montrer que  $|\lambda| \leq 1$ .  
 (c)  $\star$  Montrer qu'il existe un élément  $U$  de  $E_1(A)$  dont toutes les composantes sont strictement positives. On pourra, pour  $(x_1, \dots, x_n)^\top$  vecteur propre associé à une valeur propre de module 1, considérer  $(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)^\top$ .  
 (d)  $\star$  Montrer que tout élément  $V$  de  $E_1(A)$  dont toutes les composantes sont strictement positives est colinéaire à  $U$ .
- Indication* : choisir  $\lambda$  tel que  $U - \lambda V$  ait tous ses coefficients positifs et un au moins nul.
12.  $\star\star$  Soit  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel de dimension finie ; on désignera par  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbf{E}$ . Soit  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite d'ouverts denses de  $\mathbf{E}$ . Montrer que  $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n$  est dense. Soit  $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de fermés de  $\mathbf{E}$

telle que  $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n = \mathbf{E}$ . Montrer que  $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \overset{\circ}{F}_n$  est un ouvert dense.

13.  $\star\star$  Soit  $(f_n)$  une suite d'applications de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  continues, qui converge simplement vers une application  $f$ .
- (a) Soit  $\varepsilon$  un élément de  $\mathbf{R}_+^*$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$F_{n, \varepsilon} := \{ x \in \mathbf{E} \mid \forall p \in \mathbf{N}, (p \geq n) \Rightarrow (\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon) \}$$

et

$$\Omega_\varepsilon := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \overset{\circ}{F}_{n, \varepsilon}.$$

Montrer que  $\Omega_\varepsilon$  est un ouvert dense.

- (b) Montrer que tout élément  $a$  de  $\Omega_\varepsilon$ , admet un voisinage  $V$  tel que pour tout élément  $x$  de  $V$ ,  $\|f(x) - f(a)\| \leq 3\varepsilon$ .  
 (c) Montrer que  $f$  est continue sur un  $G_\delta$  dense. Application aux dérivées.



## INDICATIONS

8. ★ On munit  $\ell^\infty$  ensemble des suites réelles bornées de la norme  $N_\infty$ . On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des suites réelles ultimement nulles (polynômes). Déterminer l'adhérence de  $\mathcal{P}$ .

### PREUVE SÉQUENTIELLE

Notons  $\ell_0$  l'ensemble des suites réelles de limite nulle. Un élément  $u$  de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  sera noté  $u = (u(k))_{k \in \mathbf{N}}$ , notation qui permettra de considérer des suites  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  (suite de suites!), on notera pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$u_n = (u_n(k))_{k \in \mathbf{N}}.$$

Soit  $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ .

•  $\ell_0 \subset \overline{\mathbf{R}[X]}$ .

Soit  $u \in \ell_0$ . Considérons la suite de polynômes  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  où, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ; la suite  $p_n$  est la troncature de  $u$  au rang  $n$  :

$$p_n(k) = u(k) \text{ pour } k = 0, 1, \dots, n \text{ et } p_n(k) = 0 \text{ pour } k \geq n + 1.$$

La suite de polynômes  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $u$ . La convergence vers 0 de  $u$  nous livre un naturel  $N$  tel que pour tout  $k \in \llbracket N, +\infty \llbracket$ ,  $|u(k)| \leq \varepsilon$ .

Soit alors un entier  $n \geq N$ . Pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , si  $k \leq n$  alors  $|p_n(k) - u(k)| = 0 \leq \varepsilon$ , et sinon  $|p_n(k) - u(k)| = |u(k)| \leq \varepsilon$ , puisque  $k > n \geq N$ ; Donc

$$N_\infty(p_n - u) \leq \varepsilon.$$

Donc  $u$ , limite de la suite de polynômes  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est adhérente à  $\mathbf{R}[X]$

•  $\overline{\mathbf{R}[X]} \subset \ell_0$ .

Soit  $v$  un élément de  $\overline{\mathbf{R}[X]}$ , on dispose d'une suite  $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $\mathbf{R}[X]$  de limite  $v$  et donc en particulier d'un élément  $n_0$  tel que  $N_\infty(v - q_{n_0}) \leq \varepsilon$ . Notons  $d_0$  le degré de  $q_{n_0}$ . Pour tout entier  $k$ , si  $k \geq d_0$ , alors

$$|v(k)| \leq |v(k) - q_{n_0}(k)| + |q_{n_0}(k)| \leq N_\infty(v - q_{n_0}) + 0 \leq \varepsilon.$$

Donc  $v \in \ell_0$ .

Par ces deux points;  $\ell_0 \subset \overline{\mathbf{R}[X]}$ .

### PREUVE NON SÉQUENTIELLE

•  $\ell_0 \subset \overline{\mathbf{R}[X]}$ .

Soit  $u \in \ell_0$ . La convergence vers 0 de  $u$  nous livre un naturel  $N$  tel que pour tout  $k \in \llbracket N + 1, +\infty \llbracket$ ,  $|u(k)| \leq \varepsilon$ . Soit  $p$  le polynôme qui coïncide avec  $u$  sur  $\llbracket 0, N \llbracket$  et qui est nul sur  $\llbracket N + 1, +\infty \llbracket$ . Pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , si  $k \leq N$  alors  $|p(k) - u(k)| = 0 \leq \varepsilon$ , et sinon  $|p(k) - u(k)| = |u(k)| \leq \varepsilon$ , et donc

$$N_\infty(p_n - u) \leq \varepsilon.$$

Donc la boule de centre  $u$  de rayon  $\varepsilon$  rencontre  $\mathbf{R}[X]$ . La suite  $u$  est donc adhérente à  $\mathbf{R}[X]$ .

•  $\overline{\mathbf{R}[X]} \subset \ell_0$ .

Soit  $v$  un élément de  $\overline{\mathbf{R}[X]}$ , La boule ouverte de centre  $v$  de rayon  $\varepsilon$  rencontre  $\mathbf{R}[X]$  en un polynôme  $q$ . Notons  $d$  le degré de  $q$ . Pour tout entier  $k$ , si  $k \geq d$ , alors

$$|v(k)| \leq |v(k) - q(k)| + |q(k)| \leq N_\infty(v - q) + 0 \leq \varepsilon.$$

Donc  $v \in \ell_0$ .

## Programme de colles n°5

---

### 16 Espaces vectoriels normés

- Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
- Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
- Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
- Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
- Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
- Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
- *A venir : Révisions sur les fonctions d'une variable réelle...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennoél Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noah Tusch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwennoél Traon, Alex Zeitler.

### 17 Questions de cours

- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Lipschitzité de la fonction distance à une partie non vide.

### 18 Récitation d'exercices

1. (a) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , norme qui à une matrice associe la somme des valeurs absolues de ses coefficients. Montrer que  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$  est un ouvert dense.
  - (b) Montrer que  $\text{SL}_n(\mathbf{R})$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$  fermé (dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ) et non borné.
2. On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Montre que l'ensemble  $D_n$  des éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  diagonalisables est dense. Est il-ouvert ? fermé ?
3. \* Soit un entier  $n \geq 2$ . On dit qu'un élément  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  est cyclique si il existe un élément  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$  tel que  $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$  soit libre.
  - (a) Montrer que l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  cycliques est ouvert.
  - (b) Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  diagonalisable et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres. Montrer que si les  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ , sont deux à deux distincts alors  $M$  est cyclique. Étudier la réciproque.
  - (c) Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  est dense.
4. \* On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Montrer que  $O_n$  est dans l'adhérence de la classe de similitude de  $M$  si et seulement si  $M$  est nilpotente.
5. On pose  $A = \{\exp(in), n \in \mathbf{Z}\}$ . Montrer que  $\bar{A} = \mathbf{U}$ .
6. \*\* Reprendre la question précédente avec  $A = \{\exp(in), n \in \mathbf{N}\}$ .
7. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite à valeurs dans l'e.v.n.  $(\mathbf{R}, |\cdot|)$  qui converge vers un élément  $\ell$  de  $\mathbf{E}$ . Soient  $\Sigma \alpha_n$  une série à termes strictement positifs divergente, on note  $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite de ses sommes partielles. Soit la suite  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par,

$$\forall n \in \mathbf{N}, z_n = \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^n \alpha_k x_k,$$

Déterminer la limite de cette dernière suite.

8. \* Même question que la précédente lorsque  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  tend vers  $-\infty$ .

9. Montrer que la relation

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n), \end{cases}$$

définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . Donner la limite de cette suite puis un équivalent simple de son terme général<sup>1</sup>.

10. Montrer que la relation

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(1 + u_n), \end{cases}$$

définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . Donner la limite de cette suite, puis montrer que la suite  $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbf{N}}$  admet une limite à déterminer.

11. ★ Reprendre la question précédente et donner un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

12. Soit  $S$  des applications  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  continues telles que pour tout  $x$  et tout  $y$  réels,

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Déterminer  $S$  par deux méthodes :

— en utilisant la densité de  $\mathbf{Q}$  ;

— en régularisant par intégration.

13. ★ Soit  $S$  des applications  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  continues telles que pour tout  $x$  et tout  $y$  réels,

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y).$$

(a) Soit  $f$  un élément de  $S$  non nul. Montrer que  $f(0) = 1$  et que  $f$  est paire.

(b) Soit  $f$  un élément de  $S$  non nul est indéfiniment dérivable. Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,

$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$

(c) Montrer que tout élément de  $S$  est indéfiniment dérivable. Déterminer  $S$ .

14. ★★ Soit  $U$  un ouvert d'un e.v.n.  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ . Montrer que  $U$  est homéomorphe à un fermé de  $(\mathbf{E} \times \mathbf{R}, N_\infty)$ . La norme  $N_\infty$  est définie par :

$$\forall (\vec{x}, y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{R}; N_\infty(\vec{x}, y) = \sup(\|\vec{x}\|, |y|).$$

15. ★★ Soit  $f$  une application linéaire de  $R^n$  dans  $\mathbf{R}^p$ . Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si l'image de tout ouvert est ouvert.

16. ★★ On munit  $\ell_1$  de la norme  $N_1 : u \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ .

(a) Vérifier que  $N_1$  est bien une norme et déterminer l'adhérence de  $\mathbf{R}[X]$  dans  $\ell_1$ .

(b) L'e.v.n.  $(\ell_1, N_1)$  admet-il une partie dense dénombrable ?

(c) On munit  $\ell_\infty$  de la norme  $N_\infty$ . Déterminer l'adhérence de  $\mathbf{R}[X]$  dans  $\ell_\infty$ .

(d) L'e.v.n.  $(\ell_\infty, N_\infty)$  admet-il une partie dense dénombrable ?

---

1. Dans cet exercice et le suivant, les élèves doivent connaître la méthode sans pour le moment, en comprendre l'origine.

# Programme de colle n°6,

## 19 Révision du cours sur les fonctions d'une variable réelle de MPSI

- Théorème de la limite monotone.
- Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de l'homéomorphisme croissant.
- Lemme de Rolle, inégalité des accroissements finis, théorème du prolongement  $\mathcal{C}^n$ .
- etc.
- Fonction. convexes.
  - Définition, interprétation géométrique en terme de corde, formule de Jansen.
  - Lemme des trois pentes, caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.
  - Caractérisation des fonctions convexes dérivables et deux fois dérivables. Une fonction dérivable convexe est au dessus de ses tangentes, position par rapport à une sécante.
  - Inégalité de convexité  $e^x \geq 1 + x$ ,  $\ln(1 + x) \leq x$ , inégalité de Young, Inégalité de Hölder.
  - *A venir*. Espace vectoriels normés, deuxième partie.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajyad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noah Tousch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.

medskip

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

## 20 Questions de cours

1. Théorème de Rolle, puis égalité des accroissements finis.
2. Soit  $f$  une application continue sur un intervalle  $I$  telle que sa restriction à  $I \setminus \{a\}$  soit dérivable. On suppose que  $f'$  admet en  $a$  une limite épointé  $\ell$  finie ou non. Montrer que

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \xrightarrow[t \rightarrow a, t \neq a]{} \ell.$$

Cas où  $\ell$  est un réel.

## 21 Exercices

1. Enoncer le théorème de DARBOUX et donner en une preuve utilisant le théorème de la borne atteinte.
2. Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  dérivable qui admet 0 comme limite en  $+\infty$  et  $-\infty$ . Montrer que  $f'$  s'annule, par l'une des deux méthodes suivantes laissées au choix du coleur :
  - en utilisant le théorème de la borne atteinte (et un joli dessin) ;
  - en effectuant un changement de variable.
3. Inégalité de KOLMOGOROV —

Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que  $f$  et  $f''$  sont bornée. On note  $M_0 := \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$  et  $M_2 := \sup_{x \in \mathbf{R}} |f''(x)|$ .

Montrer que pour tout réel  $x$ ,

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

On pourra appliquer l'inégalité de Taylor lagrange entre  $x$  et  $x + h$  et entre  $x$  et  $x - h$ , pour tout réel  $h > 0$ .

4. Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  convexe et non constante. Montrer que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .
5. Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  strictement convexe continue<sup>2</sup>. On suppose que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $-\infty$ . Montrer que  $f$  atteint sa borne supérieure en un et un seul point  $a$  de  $\mathbf{R}$ . Montrer que si  $f$  est de plus dérivable, alors  $a$  est **caractérisé** par  $f'(a) = 0$ .

2. la continuité des applications convexes sur l'intérieur de leur intervalle de définition n'est pas au programme

6. Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  dérivable et strictement convexe. On suppose de plus que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty. \quad (2)$$

Montrer que  $f'$  est un homéomorphisme de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$ .

*Version* ★ On ne suppose en plus  $f$  que dérivable et non de classe  $\mathcal{C}^1$ .

7. Soient  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1 et  $f$  une application d'un intervalle  $I$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$ . On suppose que  $f$  admet  $n + 1$  zéros comptés avec leurs ordres. Montrer que  $f^{(n)}$  s'annule.
8. Soit  $n$  un entier naturel, et soit  $f$  une application d'un segment  $[a, b]$  ( $a < b$ ) à valeurs réelles, de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , soient enfin  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $n + 1$  points deux à deux distincts de  $[a, b]$ .
- (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ , que nous noterons  $P$ , qui coïncide avec  $f$  en chacun des points  $x_i$
- (b) Montrer que pour tout élément  $x$  de  $[a, b]$  il existe un élément  $y$  de  $[a, b]$  tel que :

$$(f - P)(x) = f^{(n+1)}(y) \cdot \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!},$$

9. ★ — ÉGALITÉ DE TAYLOR LAGRANGE — Soit  $n$  un entier naturel, et soit  $f$  une application d'un segment  $[a, b]$  ( $a < b$ ) à valeurs réelles,  $n + 1$  fois dérivable, soit enfin  $x_0$  un point de  $[a, b]$ . Montrer que pour tout élément  $x$  de  $[a, b]$ , il existe un élément  $y$  de  $]x_0, x[$ , tel que :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n (x - x_0)^i \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} + (x - x_0)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}.$$

Dans le cas où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  retrouver ce résultat par la formule de Taylor avec reste intégrale.

10. Énoncer et prouver les inégalités de Young et Hölder.

11. ★ INÉGALITÉ DE JENSEN —

Soit  $f$  une application d'un segment  $[a, b]$ , non réduit à un point, à valeurs réelles, continue et *convexe*. Soient  $x$  une application de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[a, b]$  continue et  $\alpha$  une application de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$  continue telle que :

$$\int_0^1 \alpha(t) dt = 1.$$

(a) Montrer que :  $\int_0^1 \alpha(t)x(t) dt \in [a, b]$ .

(b) Montrer que  $f\left(\int_0^1 \alpha(t)x(t) dt\right) \leq \int_0^1 \alpha(t)f(x(t)) dt$ .

12. ★ — INÉGALITÉ DE HÖFDING — Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes centrées, et  $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite de réels telles que pour  $i = 1, 2, \dots, n$  on ait presque sûrement  $|X_i| \leq |c_i|$ . On note  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  et  $C_n = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2$ .

(a) Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$  et tout réel  $t$ ,  $\exp(tx) \leq \frac{1-x}{2} \exp(-t) + \frac{1+x}{2} \exp(t)$ .

(b) Soit  $X$  une variable aléatoire centrée tel que  $|X| \leq 1$ , p.s. Montrer que  $E(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ .

(c) En déduire que  $E(\exp(tS_n)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}C_n\right)$ .

(d) Montrer que  $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2C_n}\right)$ .

13. ★ Soit  $f$  une application continue de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , telle que pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ . Montrer que  $f$  est convexe.

★★ Le résultat demeure-t-il pour  $f$  non continue<sup>3</sup> ?

14. ★★ On suppose que tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  il existe au moins un élément  $t$  de  $]0, 1[$  tel que :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Montrer que  $f$  est convexe.

15. ★★

---

3. On admettra au besoin l'existence de bases du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbf{R}$ .

- (a) Montrer qu'une fonction continue d'un segment  $[a, b]$  dans  $\mathbf{R}$  qui admet en tout point un maximum est constante.
- (b) Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ . On appelle valeur maximale, tout réel  $y$  tel qu'il existe un réel  $x$  en lequel  $f$  admet un maximum local. Montrer que l'ensemble des valeurs maximales de  $f$  est au plus dénombrable.
- (c) Montrer qu'une application continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbf{R}$  qui admet en tout point un extremum local est constante.

# Programme de colles n°7

---

## 22 Espaces vectoriels normés

- Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
- Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
- Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
- Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
- Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
- Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
- Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
- Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de  $(\mathbf{R}|\cdot|)$ . Les compacts de  $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$  sont les parties fermées bornées ( $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ). Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
- Connexité par arcs : convexes (caractérisation par le barycentre de  $n$  points), parties étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).

*Les ensembles convexes seront au centre du prochain programme*

- *A venir : intégrales convergentes. Chapitre III sur les e.v.n.*

**Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwenolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noah Tusch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.**

medskip

**Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwenolé Traon, Alex Zeitler.**

## 23 Questions de cours

1. Compacité d'un segment de  $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ . Par dichotomie ou par le lemme du soleil levant au choix du colleur.
2. Une suite d'un espace vectoriel normé  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$  à valeurs dans un compact  $K$  converge si et seulement si elle admet une et une seule valeur d'adhérence.

## 24 Récitation d'exercices

1. Montrer que toute application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  continue et périodique est uniformément continue.
2. Soit  $F$  une partie fermée d'un espace vectoriel normé  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$  de dimension finie. Soient  $k$  un élément de  $[0, 1[$ , et  $\vec{f}$  une application de  $F$  dans  $F$   $k$ -contractante. On note  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite des itérés d'un point  $\vec{a}$  de  $K$  par  $f$ .
  - (a) Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  admet un et un seul point fixe, en utilisant ou sans utiliser les séries, au choix du colleur.
  - (b) \* Montrer que le résultat demeure si l'on suppose qu'il existe un entier  $N \geq 1$  tel que  $\vec{f}^N$  soit  $k$ -contractante.
  - (c) \* Dans le cas où  $F$  est un compact étoilé, montrer que le résultat demeure en ne supposant plus que  $f$  est  $k$ -contractante mais seulement 1-lipschitzienne.
3. Soit  $F$  un fermé d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que pour tout élément  $\vec{a}$  de  $\mathbf{E}$ , il existe un élément  $\vec{f}$  de  $\mathbf{F}$  tel que  $d(\vec{a}, F) = \|\vec{f} - \vec{a}\|$ .
4. THÉORÈME DE RIESTZ. \*\* Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel de dimension infinie n'est pas compact.

5. DARBOUX.★ Soit  $f$  une application d'un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , dérivable.

On note  $T = \{(x, y) \in I^2, y < x\}$  et on considère

$$\psi : T \rightarrow \mathbf{R}; (x, y) \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Montrer que  $\psi(T) \subset f'(I) \subset \overline{\psi(T)}$ , en déduire que  $f'(I)$  est un intervalle.

6. Montrer que  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$  n'est pas connexe par arcs mais que  $\text{GL}_n(\mathbf{C})$  l'est.
7. Montrer que  $\text{O}_n(\mathbf{R})$  n'est pas connexe par arcs mais que  $\text{SO}_2(\mathbf{R})$  l'est.
8. (a) Soit  $A$  un connexe par arcs d'une e.v.n.  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ . Montrer que toute partie de  $A$  relativement ouverte et fermée est soit  $A$  soit vide.  
(b) Soit  $U$  un ouvert d'un e.v.n.  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$  connexe par arcs. Montrer que  $U$  est « connexe par lignes brisées ».
9. ★ Soit  $K$  un compact d'une e.v.n.  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ .  
(a) Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Montrer que  $K$  est inclus dans la réunion d'un nombre fini de boules centrées en des points de  $K$  et de rayon  $\varepsilon$ .  
(b) ★★ Montrer que  $K$  possède une partie dense dénombrable.
10. ★ Déterminer les composantes connexes par arcs de  $\text{GL}_2(\mathbf{R})$ .
11. ★★ Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  non inversible. Montrer que  $\text{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{A\}$  est connexe par arcs.
12. (Révision) Montrer que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  rencontre  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ .
13. (Révision) Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  ayant  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes.  
(a) Montrer qu'un élément  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et  $A$  commutent si et seulement si  $M$  est un polynôme en  $A$ .  
(b) Montrer que l'ensemble des matrices éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  qui commutent avec  $A$  est un espace vectoriel dont on précisera la dimension. Ce résultat serait-il vrai si  $A$  était diagonalisable à valeurs propres non toutes distinctes ?
14. (Révision) Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , nilpotent d'ordre  $n$ . Déterminer le commutant de  $f$  ainsi que sa dimension.
15. (Révision) Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Montrer que pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , il existe une matrice triangulaire supérieure  $(t_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ , semblable à  $M$ , telle que pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments distincts de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $|t_{i,j}| \leq \varepsilon$ .  
★ Montrer que  $\text{O}_n$  est adhérent à la classe de similitude de  $M$  si et seulement si  $M$  est nilpotente.
16. ★ Soit  $P$  un polynôme unitaire de  $\mathbf{R}[X]$  de degré  $d$ . Montrer qu'il est scindé sur  $\mathbf{R}[X]$  si et seulement si pour tout complexe  $z$ ,  $|P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^d$ . En déduire que l'adhérence dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est scindé. Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}$ , tel que pour tout  $x \in \mathbf{R}_+$ ,

$$f(nx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +0$$

- (a) On suppose  $f$  uniformément continue. Montrer que  $\lim_{+\infty} = 0$ .
- (b) ★★ On ne suppose plus  $f$  que continue.  
Soit  $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ . Pour tout entier  $n \geq 0$ , on pose  $F_n = \{x \in \mathbf{N}; \forall p \in \mathbf{N}, p \geq n \implies |f(px)| \leq \varepsilon\}$ .  
i. Montrer qu'il existe  $N \in \mathbf{N}$ , tel que  $F_N$  soit d'intérieure non vide.  
ii. Conclure.
- (c) Donner un exemple d'application  $f$  qui n'admet pas 0 comme limite en  $+\infty$ .

## PROGRAMME DE L'INTERROGATION DE RENTRÉE

Au programme :

- devoir 0 de rentrée
  - exercice 1, question 1 & 2,
  - exercice 2, question 1 & 2 ;
- devoir maison 1 question 1,2 et 3 ;
- devoir surveillé numéro 1
  - partie I,



- partie II, questions 1 et 2 ;
- devoir surveillé numéro 2
  - partie I A,
  - partie I. B ;
- Colles
  - semaine 1, exercice 4 & 8,
  - semaine 2 exercice 6,
  - semaine 3 exercice 2,
  - semaine 4 exercice 2.

### Correction de la question 12

Notons  $r$  le rang de  $A$ . On dispose donc de matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que :

$$PAQ^{-1} = J_r.$$

Notons  $C = \text{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{A\}$  et  $C' = \text{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{J_r\}$ . Par inversibilité de  $P$  et  $Q$  on a  $C = \Phi(C')$ , où

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); M \mapsto P^{-1}MQ.$$

Or l'application  $\Phi$  est continue, bientôt on écrira « car linéaire en dimension finie », aujourd'hui disons que ses composantes dans la base canonique sont polynomiales en les coordonnées de la variable dans la base canonique. Donc il suffit de prouver la connexité par arcs de  $C'$  pour avoir celle de  $C$ . Faisons.

On note  $\mathcal{R}$  la relation définie sur  $C'$  ainsi : un élément  $M$  de  $C'$  est en relation avec un élément  $M'$  de  $C'$  si, par définition, il existe un chemin joignant  $M$  à  $M'$  de support inclus dans  $C'$ . Le cours affirme que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

D'abord  $J_r \mathcal{R} \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1)$ . En effet l'application

$$\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); t \mapsto \text{diag}(I_r, tI_{n-r-1}, -tI_1)$$

relie  $J_r$  à  $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1)$ , est continue (ses composantes dans la base canonique sont affines) et est à valeurs dans  $C'$ , puisque  $\Gamma(0) = J_r$  et que pour tout  $t \in ]0, 1]$  le déterminant de  $\Gamma(t)$  vaut  $-t^{n-r-1}$  et est donc non nul.

Ensuite sur le même principe on montre que  $J_r \mathcal{R} I_n$ .

Donc la classe d'équivalence pour  $\mathcal{R}$  contient  $I_n$  et  $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1)$  mais comme  $\text{GL}_n^\pm(\mathbf{R})$  est connexe par arcs, elle contient  $\text{GL}_n^+(\mathbf{R})$  et  $\text{GL}_n^-(\mathbf{R})$  donc  $C'$  entier. Donc  $C'$  est connexe par arcs.

Donc  $C$  est bien connexe par arcs.

# Programme de colles n°8

---

## 25 Espaces vectoriels normés

### Révisions !

- Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
- Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
- Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
- Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
- Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
- Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
- Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
- Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de  $(\mathbf{R} | \cdot |)$ . Compacts de  $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$ . Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
- Connexité par arcs : convexes, parties étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).

## 26 Intégrale sur un intervalle quelconque

**Il s'agit d'un premier contact les exercices doivent rester élémentaires.**

- Intégrale convergente, absolument convergente, fonctions intégrables. L'absolue convergence assure la convergence.
- Théorèmes de comparaison,
- *à venir : intégration des relations de comparaison, changement de variables et intégrations par parties dans une intégrale généralisée.*

**Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noah Tousch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.**

medskip

**Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwennolé Traon, Alex Zeitler.**

## 27 Récitation d'exercices

1. Soit  $C$  un convexe d'un e.v.n  $(\mathbf{E}, \| \cdot \|)$ . Montrer que l'intérieur et l'adhérence de  $C$  sont convexes.
2. \*\* Soient  $X$  un convexe de  $\mathbf{R}^n$  non vide,  $a$  un point intérieur à  $X$  et  $b$  un point adhérent à  $X$ . Montrer que  $[a, b[$  est inclus dans l'intérieur de  $X$ .  
*Indication :* Étudier pour un point  $x$  de  $[a, b[$  l'image d'une boule de centre  $a$  par une homothétie de centre  $x$ .
3. Soient un entier  $n \geq 2$  et une application  $f$  de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}$  continue.
  - (a) On suppose qu'il existe un réel  $a$  tel que  $f^{-1}(\{a\})$  soit un singleton. Montrer que  $f$  atteint en  $f^{-1}(\{a\})$  son maximum ou son minimum.
  - (b) On suppose qu'il existe un réel  $b$  tel que  $f^{-1}(\{b\})$  soit compact. Montrer que  $f$  atteint son maximum ou son minimum.
4. — PROJECTION SUR UN CONVEXE —
  - (a) Soit  $C$  un convexe non vide fermé de  $\mathbf{R}^n$ , muni de sa structure euclidienne canonique. Soit  $z$  un élément de  $\mathbf{R}^n$ . Montrer qu'il existe un et un seul point  $c$  de  $C$  tel que :  $\|z - c\| = d(z, C)$ . Le point  $c$  sera noté  $p(z)$ .
  - (b) Soit  $y$  un élément de  $C$ , montrer que :  $\langle y - p(z) | z - p(z) \rangle \leq 0$ .

- (c) ★ Soient  $a$  et  $b$  des éléments de  $\mathbf{R}^n$ . Montrer que :  $\|p(a) - p(b)\| \leq \|a - b\|$ .
5. ★ On garde le cadre de l'exercice précédent. On appelle hyperplan d'appui de  $C$  en un point  $a$  de  $C$  tout hyperplan  $\mathbf{H}$  de  $\mathbf{R}^n$  passant par  $a$  tel que  $C$  soit inclus dans un des demi-espaces fermés définis par  $\mathbf{H}$ .
- (a) On suppose que  $z$  n'appartient pas à  $C$ . Montrer que  $C$  admet en  $p(z)$  un hyperplan d'appui
- (b) Montrer que  $p(\mathbf{R}^n - C) \subset \text{Fr}(C)$
- (c) Soit  $f$  un point de la frontière de  $C$ . Montrer que  $C$  admet en  $f$  un hyperplan d'appui.
6. ★★ On garde le cadre de la question précédente.
- Un point  $a$  de  $C$  est dit extrémal si  $C - \{a\}$  est convexe, autrement dit si  $a$  n'est pas le milieu de deux points distincts de  $C$ .
- Montrer que  $C$  est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (Théorème de Krein-Milman).
7. (a) On appelle enveloppe convexe d'une partie  $A$  non vide d'un espace vectoriel normée  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ , notée  $\text{conv}(A)$  l'intersection de tous les convexes inclus contenant  $A$ , c'est donc le plus petit convexe contenant  $A$  (on fera un dessin). Montrer que  $\text{conv}(A)$  est l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs de points de  $A$ .
- (b) ★ On suppose  $\mathbf{E}$  de dimension  $n$ . Montrer que  $\text{conv}(A)$  est l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs de  $n + 1$  points de  $A$  (on illustrera la preuve par une figure). Montrer que si  $A$  est compact alors  $\text{conv}(A)$  est compact. Donner un exemple de partie  $A$  fermée telle que  $\text{conv}(A)$  ne le soit pas.
8. Étudier la convergence de l'intégrale suivante :  $\int_0^{+\infty} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ .
9. Soit  $\Gamma$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .
- (a) Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $\Gamma$ .
- (b) Donner pour tout  $x \in D$  une relation entre  $\Gamma(x + 1)$  et  $\Gamma(x)$ .
- En déduire la valeur de  $\Gamma(n)$  pour tout entier  $n$  élément de  $D$ .

(c) ★★ ÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS VECTORIELLE

Soit  $F$  une application d'une application d'un intervalle ouvert  $I$  non vide à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et soient  $a$  et  $b$  des éléments de  $I$  tels que  $a < b$ . Notons  $d$  la dimension de l'espace affine engendré par  $F([a, b])$ . Alors il existe  $c_1, c_2, \dots, c_{d+1}$  des éléments de  $[a, b]$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}$  des réels positifs ou nuls de somme 1, tels que

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i F(c_i).$$

# Programme de colles n°9

## 28 Révision sur les calculs de primitives

## 29 Intégrale sur un intervalle quelconque

- Intégrale convergente, absolument convergente, fonctions intégrables. L'absolue convergence assure la convergence.
- Théorèmes de comparaison, intégration des relations de comparaison.
- Changement de variables et intégrations par parties dans une intégrale généralisée.
- Théorème de comparaison série/intégrale.
- *À venir Espace vectoriels normés ch. III (Applications linéaires continues, normes équivalentes, espace de dimension finie).*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennoél Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noah Tousch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.

medskip

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwennoél Traon, Alex Zeitler.

## 30 Question de cours

1. Soient  $\phi$  et  $\psi$  des applications de  $[a, b[$  dans  $\mathbf{R}$ , à valeurs positives. On suppose que  $\phi(t) = \underset{t \rightarrow b}{o}(\psi(t))$  et que  $\phi$  est non intégrable. Alors  $\psi$  est non intégrable et

$$\int_a^x \phi(t) dt = \underset{x \rightarrow b}{o} \left( \int_a^x \psi(t) dt \right).$$

## 31 Exercices

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'application

$$f_n : ]0, 1[ \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$$

est intégrable (sommable).

- (b) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $I_n = \int_{]0, 1[} f_n$ . Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a  $I_{n-1} - I_n = \frac{3}{4n-3} I_n$ .
- (c) Calculez  $I_0$  et en déduire l'expression de  $I_n$  pour tout entier naturel  $n$ .
2. Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(P_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ , où pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$P_n = \left( \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{k}{n} \right)^k \right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

ou version \*

Soit  $f$  une application d'un segment  $[a, b]$ , non réduit à un point, à valeurs réelles, dérivable et dont la dérivée est continue par morceaux. Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(J_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ , où pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$J_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left( a + (k-1) \frac{b-a}{n} \right) f' \left( a + k \frac{b-a}{n} \right).$$

3. Montrer la convergence et donner la valeur des l'intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t) - \exp(-2t)}{\sqrt{t}} dt; \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t) - \exp(-2t)}{t} dt$$

4. (a) Soit  $g$  une application d'un segment  $[a, b]$  dans  $\mathbf{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que  $\int_a^b g(t) \sin(nt) dt$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

(b)  $\star$  à la place de (a).

Soient  $h$  une application continue de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ ,  $T$ -périodique et  $\langle h \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt$ . Montrer que  $\int_a^b g(t) h(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle h \rangle \int_a^b g(t) dt$ .

(c) Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  intégrable. Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(nt) dt$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

5. Déterminer des équivalents simples, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , des quantités suivantes :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^c} dt, \text{ pour } c \text{ élément de } ]1, +\infty[, \int_0^x e^{t^2} dt, \int_e^x \frac{dt}{\ln t}.$$

$\star$  Donner un développement asymptotique à tout ordre de  $\int_0^x e^{t^2} dt$ , lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

6.  $\star\star$  Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  et intégrable.

(a) Montrer que  $f$  n'est pas nécessairement bornée.

(b) On suppose de plus que  $f'$  est de carré intégrable (sur  $\mathbf{R}_+$ ). Montrer que  $f$  est bornée.

7. Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}$ , continue et bornée. On admet que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , justifier l'existence de  $J_n = n \int_0^{+\infty} e^{-n^2 t^2} f(t) dt$ .

(a) Montrer, par un raisonnement élémentaire que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$  a une limite à déterminer.

(b) (5/2) Reprendre la question précédente en utilisant le théorème de convergence dominée.

8.  $\star\star$  (à la place de 8.) Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  continue, tendant vers 0 en  $\pm\infty$ . Soit  $K$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , continue, à valeurs positives, nulle en dehors d'un segment et tel que  $\int_{\mathbf{R}} K = 1$ .

Pour tout entier  $n \geq 0$ , on pose  $K_n = nK(n \cdot)$  et :  $K_n \star f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) K_n(t) dt$ .

(a) Montrer que la suite  $(K_n \star f)_{n \in \mathbf{N}}$  converge uniformément vers  $f$ , c'est-à-dire que :

$$\|K_n \star f - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

(b) On suppose de plus  $K$  indéfiniment dérivable. Etudier la régularité de  $K_n \star f$ .

(c) Existe-t-il vraiment une telle application  $K$  ?

9. Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}$ , à valeurs positives ou nulles, continue. On suppose  $f$  intégrable.

(a)  $\star$  A-t-on  $\lim_{+\infty} f = 0$  ?

(b) On suppose de surcroît  $f$  décroissante. Montrer que  $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Cette dernière condition suffit-elle à prouver l'intégrabilité de  $f$  ?

(c) Énoncer et prouver un résultat analogue pour une série à termes positifs.

(d)  $\star\star$  On ne suppose plus  $f$  décroissante. Montrer qu'il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de réels qui tend vers  $+\infty$  telle que :  $x_n f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

En déduire que pour tout application  $g$  de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , et de carré intégrable,

$$\int_0^{+\infty} g^2(x) dx \leq 2 \sqrt{\int_0^{+\infty} x^2 g^2(x) dx \int_0^{+\infty} g'^2(x) dx} \leq +\infty$$

10. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ .

(a) Calculer  $I_2$  et  $I_3$ .

(b) Donner la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

(c) Donner un développement limité à l'ordre 2, en  $\frac{1}{n}$  de  $I_n$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (c'est-à-dire une expression de la forme  $I_n = a_0 + a_1 \frac{1}{n} + a_2 \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  ( $n \rightarrow \infty$ )).

(d) Exprimer pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n$  comme la somme d'une série numérique.

11. ★ — INÉGALITÉ DE HARDY —

(Inégalité de HARDY faible).

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  Pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$  et  $F(0) = f(0)$ . Montrer que :

$$\int_0^1 F^2(x)dx \leq 4 \int_0^1 f^2(x)dx.$$

12. ★ Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ . On suppose que  $f$  et  $f''$  sont de carrés intégrables. Montrer que  $f'$  est de carré sommable.



# Programme de colles n°10

## 32 Révision de sup sur les séries

## 33 Espaces vectoriels normés, fin de la trilogie

- Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
- Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
- Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
- Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
- Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
- Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
- Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
- Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de  $(\mathbf{R}|\cdot|)$ . Les compacts de  $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$  sont les parties fermées bornées ( $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ). Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
- Connexité par arcs : convexes (caractérisation par le barycentre de  $n$  points), partie étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).
- Applications linéaires continues.
- Normes équivalentes ; cas des espaces vectoriels de dimension finie.
- Espaces vectoriels de dimension finie, convergence des suites et des applications, continuité des applications à valeurs dans un espace de dimension finie, compacts d'un espace de dimension finie, théorème de Bolzano-Weierstrass.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajyad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennoél Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noah Tusch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.

medskip

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwennoél Traon, Alex Zeitler.

## 34 Questions de cours

1. Continuité d'une application linéaire : quatre propriétés équivalentes.
2. Définition de la norme subordonnée d'une application linéaire d'un e.v.n. dans un autre (preuve complète).
3. \*\* Toutes les normes en dimension finie sont équivalentes.

## 35 Récitation d'exercices

1. Montrer que  $N : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{R}_+$  ;  $A \mapsto \max_{j=1, \dots, n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$  est une norme subordonnée à une norme sur  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$  à préciser, lorsque l'on identifie les éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et les endomorphismes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$  canoniquement associés.
2. \* Montrer que  $N_F : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}_+$  ;  $A \mapsto (\text{tr}(M^\top M))^{\frac{1}{2}}$  est une norme d'algèbre. Est elle une norme subordonnée ?
3. Par  $\mathbf{E}$  sera désigner l'espace vectoriel des applications de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$ , continues. Soient  $g$  un élément de  $\mathbf{E}$  et  $L$  la forme linéaire

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}; f \mapsto \int_{[0,1]} gf.$$

On munit  $\mathbf{R}$  de  $|\cdot|$ . Montrer la continuité de  $L$  et déterminer sa norme dans les cas suivants.

- (a) On munit  $\mathbf{E}$  de la norme  $N_2$ .

- (b) ★ On munit  $\mathbf{E}$  de la norme  $N_\infty$ .
- (c) On munit  $\mathbf{E}$  de la norme  $N_1$  et on prend pour  $g = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot\right)$ .
4. Etudier les séries :  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ ,  $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(\ln(n))}{n(\ln n)^2}$ ,  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{1/2} \ln(\ln(n))}$ ,  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln(n)))^3}$ ,  $\beta$  désigne un réel.
5. Nature des séries :  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ ;  $\sum \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ .
6. (a) En comparant les sommes partielles de la série harmonique à une intégrale montrer que :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ .
- (b) Posons pour tout élément  $n$  de  $\mathbf{N}^*$ ,  $x_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ . Montrer que pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 1,

$$\frac{1}{1+k} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{1+k} \right).$$

En déduire que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge vers un réel  $\gamma$  supérieur ou égal à  $\frac{1}{2}$ .

7. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite décroissante qui converge vers 0. Montrer que la série  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\sum 10^n u_{10^n}$  converge (On utilisera la théorie des famille sommables). En déduire la nature des la séries  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^a}$  et  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n) (\ln(\ln(n)))^a}$ , où  $a$  est un réel.
8. Soit  $f$  une application de  $]0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$ , continue, décroissante et intégrable.
- Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , où pour tout entier  $n \geq 1$  on a posé  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$ .
9. ★★ Notons  $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ . Soient un réel  $C > 0$  et  $\mathbf{F}$  un sous espace vectoriel de  $\mathbf{E}$  tel que :

$$\|f\|_\infty \leq C \|f\|_2, \tag{3}$$

pour tout élément  $f$  de  $\mathbf{F}$ .

- (a) Montrer que les restrictions de  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  à  $\mathbf{F}$  sont équivalentes.
- (b) Montrer que  $\mathbf{F}$  est de dimension finie inférieure ou égale à  $C^2$ .
- (c) Donner un exemple de sous-espace vectoriel  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{E}$  de dimension  $n$  et vérifiant (3) avec  $C = n^{\frac{1}{2}}$ .
10. ★ Au choix :
- (a) On note  $E$  l'ensemble des applications de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  continues. Soient  $u$  et  $v$  des éléments de  $\mathbf{E}$ . On suppose  $u$  bornée et  $v$  intégrable. Montrer que  $uv$  est intégrable.
- On suppose que pour tout élément  $w$  de  $\mathbf{E}$  intégrable,  $uw$  est intégrable. Montrer que  $u$  est borné.
- Raisonner par l'absurde*
- (b) Soient  $u$  et  $v$  des éléments de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ . On suppose  $u$  bornée et  $v$  sommable. Montrer que  $uv$  est sommable.
- On suppose que pour tout élément  $w$  de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  sommable,  $uw$  est sommable. Montrer que  $u$  est borné.
- Raisonner par l'absurde*
11. ★ — DEUXIÈME FORMULE DE LA MOYENNE — Soient  $f$  et  $g$  des applications continues d'un segment  $[a, b]$  non réduit à un point dans  $\mathbf{R}$ . On suppose que :
- l'application  $f$  décroît ;
  - l'application  $f$  est à valeurs positive.
- Il existe un point  $c$  de  $[a, b]$  tel que :

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

- (a) Montrer le résultat pour  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- (b) ★★ Montrer le résultat dans le cas général.

# Programme de colles n°11

## 36 Processus sommatoires discrets

- Définition de la convergence d'une série à valeurs dans un e.v.n.  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ . Dans un espace vectoriel de dimension finie la convergence absolue assure la convergence.
- Séries à termes positifs. Caractérisation de la convergence par la suite des sommes partielles. Théorèmes de comparaison directe, sommation des relations de comparaisons. Règle de d'Alembert, comparaison avec une intégrale.
- Espace vectoriel des séries convergentes, des séries absolument convergentes.
- Séries réelles, plan d'étude d'une série réelle. Séries alternées.
- Exemples de séries dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , séries géométriques et exponentielles.
- Famille sommables de termes positifs ou nuls. Lien avec les séries à termes positifs ou nuls, théorème de sommation par paquets, théorème de Fubini Tonelli.
- Famille sommables de réels ou complexes. Lien avec les séries, théorème de sommation par paquets, théorème de Fubini-Lebesgues, théorème de sommation par paquets, application au produit de Cauchy de deux séries.
- Définition d'une probabilité sur un univers  $\Omega$  dénombrable, caractérisation d'une probabilité par ses valeurs sur les événements élémentaires, variable aléatoire sur  $\Omega$ , espérance d'une variable aléatoire, exemple la loi de Poisson.
- *A venir* : Fonctions vectorielles, Calcul différentiel.

**Avertissement pour les colleurs** : les familles sommables figurent au programme pour fonder rigoureusement les probabilités, elles ne doivent pas faire l'objets d'exercices autres qu'élémentaires. Les élèves ne sont pas sensés connaître autre chose en probabilités que le cours de MPSI ( $\Omega$  fini) et la définition donnée cette semaine, il y aura un chapitre entier consacré aux probabilités en fin d'année, les exercices doivent rester très élémentaires.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque  $\star$  pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques  $\star\star$  Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

## 37 Exercices

1. Donner en utilisant le théorème de sommation des équivalents :
  - un équivalent de  $\sum_{k=1}^n k^k$  ;
  - un développement limité en  $\frac{1}{n}$ , à l'ordre 2 de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .
2. Montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ . Montrer que la suite  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)_{n \in \mathbf{N}}$  est convergente. On note  $\gamma$  sa limite.
  - $\star$  Donner un équivalent simple, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma$ .
3. On munit de la norme  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

$$\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}_+; M \mapsto \sqrt{\text{Tr}({}^t M M)}$$

on admet que pour tout  $A$  et tout  $B$  éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ,

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F.$$

Définir l'exponentielle d'une matrice. Calculer l'exponentielle des matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

4. SÉRIES SANS PARAMÈTRE — Étudiez en utilisant des développements limités au **sens fort**, les séries de terme général :
- $$u_n = (-1)^n \left( e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right), \text{ etc.}$$
5. SÉRIES À PARAMÈTRE — Étudiez en utilisant des développements limités (au sens faible) la série de terme général  $u_n = \sin \left( \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{5\alpha}} \right)$ , où  $\alpha$  est un réel strictement positif, etc., etc., etc...
6. ★ Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de réels strictement positifs. On note pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n$  sa somme partielle d'ordre  $n$  et l'on suppose que  $\sum u_n$  diverge. Prouvez que  $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .
7. ★★ Étudier la série de terme général  $u_n = \sin(n! \pi e)$ .
8. (a) Montrer que la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 5, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}, \end{cases}$$

définit bien une suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

- (b) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  admet  $+\infty$  comme limite
- (c) Montrer que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c\sqrt{n}$ , où  $c$  est un réel à préciser.
- (d) ★ Montrer que  $u_{1000} \in [45, 45, 1]$ .
9. ★
- (a) Soit  $b$  un élément de  $]1, +\infty[$ . Montrer que la relation de récurrence  $\begin{cases} x_0 = b, \\ x_{n+1} = x_n + \ln(x_n), \end{cases}$  définit bien une suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . Montrer que cette suite converge vers  $+\infty$ . Donner un équivalent simple de  $\ln(x_n)$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , puis de  $x_n$ .
- (b) ★★ Donner un développement asymptotique de  $v_n$  à deux termes, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- ABEL : COUPER-RÉINDEXER-RECOLLER

10. ★ Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite croissante de réels strictement positifs qui tend vers  $+\infty$ . Soit  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de nombres complexes telle que la série  $\sum \frac{x_n}{a_n}$  converge. Montrer que  $\frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^n x_k$  tend vers 0, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

*Indication* : considérer la quantité  $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x_k}{a_k}$ .

11. Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$  (cf. 1.) à valeurs dans  $\mathbf{N}$ , d'espérance finie. Montrer que  $E(X) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(X > n)$ . au choix du colleur :
- (a) En utilisant une transformation d'Abel.
- (b) En utilisant le théorème de Fubini (on fera un joli dessin).
12. Soient  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  une suite de variables aléatoires à valeur dans  $\mathbf{N}$ , de même loi, définies sur un même univers dénombrable  $\Omega$ , et  $T$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\mathbf{N}^*$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  on a  $X_1, \dots, X_n, T$  mutuellement indépendantes et que  $X_1$  et  $T$  admettent des espérances finies. On définit alors la variable aléatoire  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_T$ .
- Montrer que  $E(S) = E(T)E(X_1)$ .
13. Soient  $X_1$  et  $X_2$  des variables aléatoires définies sur un ensemble dénombrable  $\Omega$  muni d'une probabilité  $\mathbf{P}$  et à valeurs dans  $\mathbf{N}$ , indépendantes. On suppose que la loi de  $X_i$  est une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_i$  (strictement positif), pour  $i = 1, 2$ . Montrer que  $X_1 + X_2$  suit une loi de Poisson à préciser.
14. ★★
- (a) Soient un réel  $\alpha > 2$  et  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de complexes non nuls tels que pour tout couple d'entiers naturels distincts,

$$|z_p - z_q| > 1.$$

Montrer la série  $\sum \frac{1}{|z_n|^\alpha}$  converge.

*Indication*. On pourra considérer pour tout  $N \in \mathbf{N}$ ,  $C_N = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{N}{\sqrt{2}}, |\operatorname{Im}(z)| \leq \frac{N}{\sqrt{2}} \right\}$ .

- (b) Construire une suite de complexes  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telle que la série  $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$  diverge et qui vérifie

$$|z_p - z_q| \geq 1,$$

pour tout couple  $(p, q)$  d'éléments distincts de  $\mathbf{N}$ .

## Programme de colles n°12

### 38 Fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles

- Dérivation d'applications à valeurs vectorielles.
  - Dérivée d'une fonction à valeurs dans un e.v. de dimension finie  $\mathbf{F}$ , propriétés de la dérivation.
  - Arcs paramétrés : définition, points réguliers, tangentes en un point régulier (aucune autre connaissance spécifique).
  - Dérivées d'ordres supérieurs, espace vectoriel  $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{F})$ , algèbre  $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{C})$ , formule de Leibniz. Dans le cas d'une application numérique, généralisation à une application bilinéaire, formule de Taylor-Young vectoriel à l'ordre  $n$  pour une application de classe  $\mathcal{C}^n$  (avec un petit  $o$ ).
- Intégrale *l'intégrale a été provisoirement introduite par l'intégrale des composantes dans une base, une construction intrinsèque sera donnée dans un prochain chapitre*
  - Propriétés de l'intégrale.
  - Inégalité des accroissements finis pour une application de classe  $\mathcal{C}^1$  à valeurs dans  $\mathbf{F}$ .
  - Formule de Taylor avec reste intégrale (vectorielle), inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  pour une application de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  (avec un grand  $O$ ).
  - Intégrale sur un segment de la limite uniforme d'une suite d'applications.

### 39 Calcul différentiel

**Il s'agit du début du cours, le programme s'arrête avant la différentiation d'applications composées.**

Toutes les applications sont définies sur un ouvert  $U$  d'un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{E}$ , de dimension finie  $p$  à valeurs dans un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{F}$ , de dimension finie  $n$ .  $\mathbf{E}$  sera le plus souvent vu comme un espace affine.

- Dérivées directionnelles, dérivées partielles dans une base. Une application  $\vec{f}$  ayant dans une base  $p$  applications dérivées partielles définies et continues sur  $U$  vérifie, pour tout point  $a$  de  $U$  :

$$\vec{f}(a + \vec{h}) = \vec{f}(a) + \sum_{i=1}^p h_i \cdot D_i \vec{f}(a) + o(\|\vec{h}\|), \quad (\vec{h} \rightarrow \vec{0}_{\mathbf{E}}) \quad (4)$$

- Une application ayant dans une base  $p$  applications dérivées partielles définies et continues sur  $U$ , admet des dérivées dans toutes les directions continues, et des dérivées partielles dans toute base continues : on dit qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^1$
- Notion d'applications différentiables. Une application différentiable admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur, en tout point de  $U$ . Expression de la différentielle au moyen des dérivées partielles dans une base. Interprétation géométrique dans le cas où  $\mathbf{E}$  est  $\mathbf{R}^2$  (plan tangent).
- Une application est de classe  $\mathcal{C}^1$  si et seulement si elle est différentiable et sa différentielle est continue.
- *À venir Composition d'applications différentiables, matrice jacobienne, dérivation d'ordre supérieur.*

**Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.**

**Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Augustin Ravasse.**

### 40 Questions de cours

1. Formule de Taylor reste intégral (pour une fonction vectorielle), on donnera deux expressions du reste.
2. Différentielle d'une forme linéaire, d'une application bilinéaire.
3. \*\* Soit  $\vec{f}$  une application d'un ouvert  $U$  d'un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{E}$ , de dimension finie  $p$  à valeurs dans un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{F}$ , de dimension finie  $n$ . On suppose qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{E}$  dans laquelle  $\vec{f}$  admet  $p$  applications dérivées partielles dans  $\mathcal{B}$  continue. Montrer que pour tout  $a \in U$  :

$$\vec{f}(a + \vec{h}) = \vec{f}(a) + \sum_{i=1}^p h_i \partial_i \vec{f}(a) + o(\|\vec{h}\|); \quad (\vec{h} \rightarrow \vec{0}_{\mathbf{E}}).$$

4. Sous les hypothèses de la question précédente montrer l'équivalence des deux propositions :
- L'application  $\vec{f}$  admet sur  $U$  des applications dérivées directionnelles dans toutes les directions continues.
  - Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{E}$  dans laquelle  $\vec{f}$  admet  $p$  applications dérivées partielles continues.

## 41 Récitation d'exercices

## 42 Exercices

1. Soit  $f$  une application d'un segment  $[a, b]$  dans  $\mathbf{C}$ , continue. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\int_{[a,b]} |f| = |\int_{[a,b]} f|$ . Ou bien cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour  $n$  complexes.

Version  $\star$ . Soit  $\vec{f}$  une application de  $[a, b]$  un espace euclidien  $\mathbf{E}$ , continue. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\int_{[a,b]} \|\vec{f}\| = \|\int_{[a,b]} \vec{f}\|$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne.

2. (a) Soient  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbf{R}^2$  et  $f$  une application de  $U$  dans  $\mathbf{R}$  à valeurs positives ou nulles, de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose qu'il existe un réel  $k > 0$  tel que pour tout  $m \in U$  :

$$\|\vec{\nabla} f(m)\| \leq kf(m). \quad (5)$$

Soient  $[a, b]$  un segment non réduit à un point et  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que  $\gamma([a, b]) \subset U$ . Enfin, on pose  $m_0 = \gamma(a)$  et  $m_1 = \gamma(b)$ .

Montrer que l'application  $f \circ \gamma$ , notée  $g$ , est de classe  $\mathcal{C}^1$  et montrer que pour tout élément  $t$  de  $[a, b]$ ,

$$g'(t) \leq k \|\vec{\gamma}'(t)\| g(t).$$

En déduire que

$$f(m_1) \leq f(m_0)e^{k\ell},$$

où  $\ell$  désigne la longueur de l'arc  $\gamma$ .

- (b) On suppose que  $U$  est l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < \|(x, y)\| < 2\}$ . Montrer que si  $f$  s'annule en un point  $a$  de  $U$  alors  $f$  est nulle.
- (c)  $\star\star$  Reprendre la question précédente avec pour  $U$  un connexe par arcs.
3. On munira  $\mathbf{R}^2$  de sa structure euclidienne canonique, par  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  on désignera le produit scalaire canonique, par  $\|\cdot\|$  la norme associée. Soient  $\varepsilon$  un élément de  $\{-1, 1\}$ ,  $A$  un point de  $\mathbf{R}^2$  et  $F$  une application d'un intervalle  $I$ , ouvert et non vide, dans  $\mathbf{R}^2 \setminus \{A\}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , telle que pour tout réel  $t$ ,

$$\vec{F}''(t) = \varepsilon \frac{\vec{AF}(t)}{\|\vec{AF}(t)\|^2}.$$

- (a) Soit l'application  $\sigma : I \rightarrow \mathbf{R}; t \mapsto \det_{\mathcal{B}_c}(\vec{AF}(t), \vec{F}'(t))$ . Montrer que  $\sigma$  est constante.
- (b) Dans cette question **on suppose que**  $\varepsilon = 1$ . Soient  $a$  et  $b$  des éléments distincts de  $I$  tels que  $F(a) = F(b)$ . En considérant

$$\frac{1}{2} \int_a^b \|\vec{F}'(t)\|^2 dt,$$

montrer que  $\vec{F}'(a) \neq \vec{F}'(b)$ . Interpréter.

- (c) Dans cette question **on suppose que**  $\varepsilon = -1$ . Soit  $R \in \mathbf{R}_+^*$ . Déterminer une valeur de  $F$  telle que le support de l'arc paramétré  $(I, F)$  soit un cercle de rayon  $R$ .
4. Étudier la continuité en  $(0, 0)$  de  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}; (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4 + 3xy^2 - 5y^3}{x^2 + y^2}, & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pour } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$  de

$$g : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}; (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 3xy^2}{x + y}, & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pour } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Soit l'application  $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pour } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$  Montrer que  $f$  admet

en  $(0, 0)$  dans toute direction une dérivée directionnelle. Est-elle continue en ce point ?

**Version  $\star$**  Soit  $g$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $F$  l'application :

$$F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}; (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{g(x) - g(y)}{x - y}, & \text{pour } x \neq y, \\ g'(x), & \text{pour } x = y. \end{cases}$$

Montrer que  $F$  est continue.

**Version** ★★ Montrer que si  $g$  est deux fois dérivable en  $a \in \mathbf{R}$ , alors  $F$  est différentiable en  $(a, a)$ .

5. Soit l'application  $\Phi_3 : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); M \mapsto M^p$ . Montrer que  $\Phi_3$  est différentiable, et donner sa différentielle (à suivre). Montrer que la fonction exponentielle définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est différentiable en 0.
6. Soit  $\delta : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); M \mapsto \det(M)$ . Montrer que  $\delta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Donner sa différentielle, au moyen du produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  :
  - en calculant les dérivées partielles ;
  - en utilisant la densité de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ .
7. Soit  $n$  un élément de  $\mathbf{N}^*$ .  $\mathbf{C}$  désigne un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  tel que pour tout élément  $X$  de  $C$  et tout élément  $t$  de  $\mathbf{R}_+^*$ ,  $t \cdot X \in C$ . Soit  $f$  une application de  $C$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que  $f$  est homogène de degré  $\alpha$ , si et seulement si, pour tout  $X \in C$ ,  $df(X) \cdot X = \alpha f(X)$ .

Déterminer la forme générale des applications de  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x > 0\}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , telles que pour tout élément  $(x, y)$  de  $C$ ,  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ .
8. ★ Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}$ , homogène de degré 1. On suppose  $n \geq 1$ . Montrer que  $f$  est différentiable en l'origine si et seulement si  $f$  est linéaire. Qu'en conclut-on pour une norme.

**Indication pour la question 6, second point**

- Remarquons qu'*a priori* l'application  $\delta$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . En effet les  $n^2$  applications

$$\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}; M \mapsto m_{i,j}; (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

sont de classe  $\mathcal{C}^1$  car linéaires. Donc  $\delta$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  comme sommes et différences de produits de ces applications.

- Ceci étant, soit  $G \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Prenons  $U$  un élément non nul de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Alors, pour tout  $t$  élément de  $\mathbf{R}^*$ ,

$$\begin{aligned} \delta(G + tU) &= \det(G) \det(I_n + tG^{-1}U) = t^n \det(G) \left( \frac{1}{t} I_n + G^{-1}U \right) = t^n \det(G) \chi_{-G^{-1}U} \left( \frac{1}{t} \right) \\ &= t^n \det(G) \left( \left( \frac{1}{t} \right)^n - \text{tr}(-G^{-1}U) \left( \frac{1}{t} \right)^{n-1} + \underset{t \rightarrow 0}{o} \left( \frac{1}{t^{n-1}} \right) \right) = \det(G) + t \det(G) \text{tr}(G^{-1}U) + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t) \\ &= \det(G) + t \text{tr}((\text{com}(G))^\top U) + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t). \end{aligned}$$

D'où l'existence de  $D_U \delta(G)$ , que nous donnait déjà le caractère  $\mathcal{C}^1$  de  $\delta$ , et

$$D_U \delta(G) = \text{tr}((\text{com}(G))^\top U) = \langle \text{com}(G) | U \rangle,$$

où  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  (identifié à  $\mathbf{R}^{(n^2)}$ ).

- Soit à présent  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On dispose d'une suite  $(G_p)_{p \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$  qui converge vers  $M$  (par exemple une suite extraite de  $(M - \frac{1}{2^p} I_n)_{p \in \mathbf{N}}$  par suppression des termes d'indices  $p$ , tels que  $\frac{1}{2^p}$  soit dans le spectre de  $M$ .)

Le caractère  $\mathcal{C}^1$  de  $\delta$  assure la continuité de  $D_U \delta$  et donc que :

$$D_U \delta(G_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} D_U \delta(M).$$

La continuité de  $\langle \cdot | U \rangle$  (linéaire en dimension finie) et de  $M \mapsto \text{com}(M)$  (polynomiale en les coordonnées dans la base canonique) veulent que :

$$\langle \text{com}(G_p) | U \rangle \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \langle \text{com}(M) | U \rangle.$$

Par ces deux points

$$D_U \delta(M) = \text{tr}((\text{com}(M))^\top U) = \langle \text{com}(M) | U \rangle.$$

Donc pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ,

$$\boxed{d\delta(A) : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}; H \mapsto \langle \text{com}(A) | H \rangle.}$$





## Programme de colle n°13

### Numéro double spécial Noël

---

### 43 Calcul différentiel

Toutes les applications sont définies sur un ouvert  $U$  d'un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{E}$ , de dimension finie  $p$  à valeurs dans un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{F}$ , de dimension finie  $n$ .  $\mathbf{E}$  sera le plus souvent vu comme un espace affine.

- Dérivées directionnelles, dérivées partielles dans une base. Une application  $\vec{f}$  ayant dans une base  $p$  applications dérivées partielles définies et continues sur  $U$  vérifie, pour tout point  $a$  de  $U$  :

$$\vec{f}(a + \vec{h}) = \vec{f}(a) + \sum_{i=1}^p h_i \cdot D_i \vec{f}(a) + o(\|\vec{h}\|), \quad (\vec{h} \rightarrow \vec{0}_{\mathbf{E}}) \quad (6)$$

- Une application ayant dans une base  $p$  applications dérivées partielles définies et continues sur  $U$ , admet des dérivée dans toutes les directions continues, et des dérivées partielles dans toute base continues : on dit qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^1$
- Notion d'applications différentiables. Une application différentiable admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur, en tout point de  $U$ . Expression de la différentielle au moyen des dérivées partielles dans une base. Interprétation géométrique dans le cas où  $\mathbf{E}$  est  $\mathbf{R}^2$  (plan tangent).
- Une application est de classe  $\mathcal{C}^1$  si et seulement si elle est différentiable et sa différentielle est continue.
- Différentiabilité de la composée. La composée d'applications de classe  $\mathcal{C}^1$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de  $B(f, g)$  où  $B$  est bilinéaire et  $f$  et  $g$  sont deux applications différentiables.
- Matrice jacobienne.
- Applications de classe  $\mathcal{C}^k$ . Théorèmes de transfert pour les applications de classe  $\mathcal{C}^k$ .
- Théorème de Schwarz (admis).

**La notion de vecteur tangent à un ensemble, et plus généralement la géométrie différentielle feront l'objet de l'avant dernier chapitre.**

### 44 Approximation uniforme, fonction d'une variable réelle

- Convergence simple et uniforme de suites et de séries d'applications d'une partie  $A$  d'un e.v. de dimension finie à valeurs dans  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  ou un e.v. de dimension finie  $\mathbf{F}$ . Critère de convergence uniforme.
- Continuité d'une limite uniforme d'une suite d'applications continues. Résultats analogues pour les séries. Dans la pratique on montre pour tout point du domaine, la convergence uniforme dans un *voisinage relatif au domaine* de ce point.
- Limite en un point (ou en  $+\infty$ ) de la limite uniforme d'une suite d'applications ayant en ce point une limite. Résultat analogue pour les séries.
- Lien entre la convergence uniforme et la convergence en norme  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Pour  $A$  compact  $(\mathcal{C}^0(A, \mathbf{F}), \|\cdot\|_{\infty})$  est une partie fermée de  $(\mathcal{B}(A, \mathbf{F}), \|\cdot\|_{\infty})$ .
- Convergence normale des séries d'applications. La convergence normale implique la convergence uniforme et uniforme absolue. Critère de convergence normale.
- Les deux théorèmes de densité au programme.
- *A venir : groupes, anneaux...*

**Les questions de cours ou exercices avec un astérisque  $\star$  pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.**

## 45 Questions de cours

- Continuité de la limite uniforme d'une suite d'applications continues.  
\*\* En remplacement : limite en un point (ou en  $+\infty$ ) de la limite uniforme d'une suite d'applications ayant en ce point une limite (théorème de la double limite).
- Toute application continue sur un segment est limite uniforme d'une suite d'applications en escalier.

## 46 Exercices

- Donner l'expression du gradient en coordonnées polaires. Ou bine, version \* : donner l'expression de la divergence en coordonnées polaires
- Déterminer l'ensemble  $S$  (rep.  $S'$ ) des éléments  $f$  de  $C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$  tels que, pour tout élément  $(x, y, z)$  de  $\mathbf{R}^3$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \text{ (resp. } x \text{)}.$$

- On pose  $U = \mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R}_- \times \{0\})$ . Déterminer l'ensemble  $S_U$  des éléments  $f$  de  $C^1(U, \mathbf{R})$  tels que, pour tout élément  $(x, y)$  de  $\mathbf{R}^2$ ,

$$-y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0, .$$

**On illustrera abondamment par des beaux dessins polychromes. On tracera notamment les lignes des champs de vecteurs associées à ces équations ainsi que les champs.**

- Déterminer l'ensemble  $S$  (rep.  $S'$ ) des éléments  $f$  de  $C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  tels que, pour tout élément  $(x, y)$  de  $\mathbf{R}^2$ ,

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \text{( resp. } f \text{)}.$$

**On illustrera abondamment par des beaux dessins polychromes. On tracera notamment les lignes du champ de vecteurs associées à cette équation ainsi que le champ.**

- On munit  $\mathbf{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique et par  $\|\cdot\|$  on désigne la norme euclidienne canonique.

$$i : \mathbf{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}^n; \vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}.$$

Montrer que  $i$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , et que la différentielle de  $i$ , en tout point  $m$  de  $\mathbf{R}^n$  distinct de  $(0, \dots, 0)$ , est la composée d'une homothétie et d'une symétrie.

- Montrer la convergence simple de la série d'applications  $\sum u_n$ , où, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n : [-1, 1[ \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{|\sin(\frac{\pi}{2}x)|^n x^n}{(n+1)^{\frac{1}{4}}}.$$

La somme de cette série est-elle continue?

- \* Soit la série d'applications  $\sum u_n$ , où pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{|\sin x|}{(n+1)^a}, \text{ pour } x \in [n\pi, (n+1)\pi], 0 \text{ sinon.}$$

et  $a$  un réel positif. Etudier la convergence simple, uniforme et normale. Discutez suivant la valeur de  $a$ . On illustrera de beaux dessins.

- Soit la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ . Montrer que le domaine de définition de  $f$  est  $]1, +\infty[$ . Étudier la continuité de  $f$  sur son domaine de définition. Montrer que  $f$  admet une limite finie à déterminer en  $+\infty$  et en  $1$ , puis donner un équivalent de  $f$  en  $1_+$ .

- \* Soit la fonction  $f$  du couple  $(x, y)$  de variables réelles, définie par  $f(x, y) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x (\ln(n))^y}$ . Étudier le domaine de définition  $D$  de  $f$ . Étudier la continuité de  $f$  sur  $D$ . On fera de belles figures.

10. Pour tout entier  $n \geq 2$  on pose,  $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ .
- Déterminer le domaine  $D$  de convergence de la série  $\sum_{n \geq 2} f_n$ . On note  $\varphi : D \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$ .
  - Montrer que  $\varphi$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
  - La série  $\sum_{n \geq 2} f_n$  converge-t-elle normalement sur son domaine de définition ?
  - Étudier la continuité de  $\varphi$  en 0.
11. (a) Donner deux exemples de normes matricielles sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Définir l'exponentielle d'un élément  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .
- Montrer que l'application  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); M \mapsto \exp(M)$  est continue.
  - On admet que pour tout couple  $(A, B)$  d'éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  qui commutent entre eux,  $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ . Montrer que l'exponentielle d'un élément  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  qui commute avec sa transposée est le produit d'une matrice symétrique et d'une matrice orthogonale.
- Les formules du type  $\ell(\exp(M)) = \exp(\ell(M))$  où  $\ell$  est linéaire doivent être justifiées par passage aux sommes partielles et continuité de  $\ell$ .**
12. *Théorème des moments* — Soit  $f$  une application de  $[0, 1]$  à valeurs complexes continue. On suppose que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\int_0^1 t^n f(t) dt = 0$ . Montrer que  $f$  est nulle.
13. Soit une suite  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'applications de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$  continues, qui converge simplement vers une application  $f$ , supposée, elle aussi, continue.
- Supposons qu'il existe  $K$ , réel, tels que pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $[0, 1]$  et tout entier naturel  $n$  :  $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|$ . (suite est équilipschitzienne). Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , converge uniformément vers  $f$ .
14. Soit une suite  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $\mathbf{R}[X]_d$  qui converge vers simplement vers une application  $f$ . Montrer que  $f$  est élément de  $\mathbf{R}[X]_d$  et que  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment.
15. ★ Que dire d'une application  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , limite uniforme d'une suite d'applications polynômiales. Montrer que toute application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  continue est limite simple d'une suite d'applications polynômiales.
16. ★ ★ (Théorème de CHUDNOVSKY) Soit  $I$  un segment inclus dans  $]0, 1[$
- Soit l'application
 
$$\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto 2x(1 - x).$$
 Étudier la convergence sur  $I$  de la suite d'application  $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$  où l'on a posé  $\varphi_n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ termes}}$
  - Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ . Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynômiales à coefficients dans  $\mathbf{Z}$  convergeant uniformément vers  $f$  sur  $I$
  - Le résultat est-il vrai sur  $[0, 1]$ .
- MATRICE JACOBIENNE
17. (a) On admet que l'application  $\mathbf{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \in \mathbf{R}_-\}$ ;  $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  dont la bijection réciproque  $\phi$  est  $\mathcal{C}^1$ . Déterminer, sans calculer  $\phi$ ,  $J_\phi$ , en un point  $(x, y)$  de  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \in \mathbf{R}_-\}$ .
- ★ Expliciter  $\phi$  et vérifier pour un ou deux coefficients de  $J_\phi$  le résultat trouvé.
18. ★ Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- Soit  $a$  un élément  $\mathbf{R}^n$ . On pose  $r = \text{rang}(df(a))$ . Montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que pour tout  $x \in V$ ,  $r \leq \text{rang}(df(x))$ .
  - ★ ★ Montrer qu'il existe un ouvert  $U$  dense dans  $\mathbf{R}^n$  tel que  $\text{rang}(df)$  soit localement constant sur  $U$ .
- FONCTIONS HARMONIQUES
19. Déterminer les applications  $f$  de  $\mathbf{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  dans  $\mathbf{R}$ , radiales, de classe  $\mathcal{C}^2$  et telles que  $\Delta f = 0$ . Que dire dans le cas  $n = 3$ .
20. ★
- Soit  $B$  la boule ouverte de  $\mathbf{R}^n$  de centre  $(0, 0, \dots, 0)$  et de rayon strictement positif  $\mathbf{R}$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $\bar{B}$  à valeurs réelles et dont la restriction à  $B$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Montrer que si  $f$  admet en un point  $m$  de  $B$  un maximum local, alors  $\Delta f(m) \leq 0$ .
  - On suppose  $f$  harmonique (i.e.  $\Delta f$  nul). Montrer que
 
$$\sup_{x \in B} f(x) = \sup_{x \in \text{Fr}(B)} f(x).$$

On pourra considérer  $f_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x\|^2$ , pour  $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ ;

### Solutions d'exercices de colles

Soit une suite  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'applications de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$  continues, qui converge simplement vers une application  $f$ , supposée, elle aussi, continue.

Supposons qu'il existe  $K$ , réel, tels que pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $[0, 1]$  et tout entier naturel  $n : |f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|$ . (suite est équilipschitzienne). Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , converge uniformément vers  $f$ .

SOLUTION.

Soit  $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ .

Choisissons une subdivision  $(a_0, a_1, \dots, a_p)$  de  $[0, 1]$  dont le pas est inférieur à  $\frac{\varepsilon}{K}$  (le réel  $K$  est nécessairement positif et, quitte à l'augmenter il est loisible de le supposer strictement positif). La convergence simple de  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  fournit un entier naturel  $n_i$ , pour  $i = 0, 1, 2, \dots, p$  tel que :

$$\forall n \in \llbracket n_i, +\infty \llbracket, |f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon. ;$$

Désignons dans la suite par  $N$  le plus grand des  $n_i$ .

Soit  $n \in \llbracket N, +\infty \llbracket$ . Soit  $x \in [0, 1]$ .

Si  $x = 1$ , alors par définition de  $n_p$  et de  $N$ ,  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ .

Supposons à présent  $x \in [0, 1[$ . Désignons par  $j$  l'élément de  $\{0, 1, \dots, p - 1\}$  tel que  $x \in [x_j, x_{j+1}[$ , alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_n(x)| \leq \\ &K|x - x_j| + \varepsilon + K|x - x_j| \leq 2K|x_{j+1} - x_j| + \varepsilon \leq 2K \frac{\varepsilon}{K} + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned} \tag{7}$$

Donc  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , converge uniformément vers  $f$ .

# Programme de colle n°14

---

## 47 Fonction d'une variable réelle, approximation uniforme

Voir programme précédent.

## 48 Révision de sup. sur les équations différentielles.

- Équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients continus, structure de l'ensemble des solutions, unicité de la solution d'un problème de Cauchy sur un intervalle donné, méthode d'abaissement du degré (application de la méthode à des équation non linéaire ou des inéquations linéaire, cf. 1 et 2).
- Équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants, cas des second membres de la forme  $p \exp(\lambda \cdot)$ , où l'application  $p$  est polynomiale.
- Intégrale sur un segment de la limite uniforme d'une suite d'applications.

**Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajyad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon, n Félix Antoine, Raphaël Castella-cousin.**

**Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Augustin Ravasse, Cyril Brévignon.**

## 49 Question de cours

Énoncez le théorème de la double limite dans le cas des suites de fonctions puis des séries et prouver le théorème de continuité d'une limite uniforme de fonctions continues.

## 50 Exercices

1. Soit  $\phi$  un élément de  $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ . On suppose que pour tout réel  $t > 0$ ,

$$\phi'(t) + 2\phi = \frac{4}{1 + \phi^2(t)}. \quad (8)$$

Montrer que  $\phi$  est bornée.

2. — PETIT LEMME DE GRONWALL —

Soient  $t_0$  un réel,  $u_1$  un réel strictement positif et  $f$  une application de  $[t_0, +\infty[$  continue. Soient  $\phi_1$  la solution du problème de Cauchy :  $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t)y, \\ y(t_0) = u_1. \end{cases}$  et  $\phi$  une application de  $[t_0, +\infty[$  dérivable telle que pour tout  $t \in [t_0, +\infty[$ ,  $\phi'(t) \leq f(t)\phi(t)$  et  $\phi(t_0) \leq u_1$ . Montrer que pour tout  $t \in [t_0, +\infty[$ ,  $\phi(t) \leq \phi_1(t)$ .

3. \*\* Soient  $t_0$  un réel,  $T$  un réel strictement positif et  $u$  et  $v$  des applications continues de  $[t_0, t_0 + T]$  dans  $\mathbf{R}_+$ . On suppose qu'il existe un réel  $C \geq 0$  tel que pour tout  $t \in [t_0, t_0 + T]$ ,

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t uv.$$

Montrer que pour tout  $t \in [t_0, t_0 + T]$ ,

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right).$$

4. (a) Soit  $a$  un réel, et  $b$  une application de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}$  continue et bornée.

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dt} = ay + b(t).$$

On suppose que  $a$  est positif strictement. Montrer qu'il existe une et une seule solution de cette équation sur  $\mathbf{R}_+$  qui soit bornée. Que dire si  $a$  est négatif ?

- (b) ★ On suppose  $a \geq 0$  et  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite de réels bornée. On note  $S$  l'ensemble des suite  $u$  telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = au_n + b_n.$$

Montrer que  $S$  possède un et un seul élément borné.

5. Déterminer l'ensemble  $E$  des applications  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  continues telles que pour tout réel  $x$ ,

$$2x f(x) = 3 \int_0^x f(t) dt.$$

6. Soit  $\sum u_n$  une série d'applications de  $[0, 1[$  dans  $\mathbf{R}$  à valeurs **positives ou nulles**. qui converge simplement. On note  $f$  sa somme. On suppose que pour tout entier  $n \geq 0$  l'application  $u_n$  admet une limite  $\ell_n$  en 1 et que  $\sum \ell_n$  diverge. Montrer que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers 1.

7. (encore) Déterminer l'ensemble  $S$  (rep.  $S'$ ) des éléments  $f$  de  $C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$  tels que, pour tout élément  $(x, y)$  de  $\mathbf{R}^2$ ,

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (\text{resp. } f).$$

**On illustrera abondamment par des beaux dessins polychromes. On tracera notamment les lignes du champ de vecteurs associées à cette équation ainsi que le champ.**

8. ★ On pose pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , et tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$u_n(x) = (-1)^n \underbrace{\sin(\sin(\dots(\sin(x))\dots))}_{n \text{ fois}}$$

- (a) Montrer que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge simplement.  
 (b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\|u_n\|_\infty = |u_{n-1}(1)|$ .  
 (c) Déterminer un équivalent de  $\|u_n\|_\infty$ .  
 (d) Montrer que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  ne converge pas normalement.  
 (e) Montrer que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge uniformément.

9. Soit la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  donnée par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2 x^2} \right).$$

- (a) Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $f$ .  
 (b) Etudier la continuité de  $f$  sur  $D$ .  
 (c) Donner un équivalent de  $f(x)$  aux bornes  $D$ .

10. ★

Pour tout entier  $n \geq 1$  on définit :  $P_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto a_n(1 - x^2)^n$ , où  $a_n = \frac{1}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx}$ .

- (a) Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , on note  $K_\alpha = [-1, -\alpha] \cup [\alpha, 1]$ . Montrer que pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ ,

$$\sup_{x \in K_\alpha} |P_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

- (b) Soit  $f$  une application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$ , continue et telle que  $f(0) = f(1) = 0$ . On prolonge cette application en une application  $\tilde{f}$  à  $[-1, 2]$  en posant  $\tilde{f}(x) = 0$ , pour tout  $x \in [-1, 2] \setminus [0, 1]$ . et on défini pour tout entier  $n \geq 1$ , et tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$Q_n(x) = \int_{-1}^1 \tilde{f}(x+t) P_n(t) dt.$$

- (c) Montrer que  $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite d'applications de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$  polynomiales. qui converge uniformément vers  $f$

11. ★

On considère  $f$  une application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$  continue. Pour tout entier  $n \geq 1$  on considère le polynôme :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k},$$

$n^{\text{e}}$  polynôme de Bernstein associé à  $f$ .

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes, toutes de même paramètre  $x$ , élément de  $[0, 1]$ . Notons pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

- (a) Donner pour tout entier  $n \geq 1$ , l'espérance de la variable aléatoire  $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ , au moyen des polynômes de Bernstein associés à  $f$  ainsi que la variance de  $\frac{S_n}{n}$ .
- (b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \mathbf{E} \left( \left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right| \right).$$

- (c) Pour tout réel  $h > 0$ , on pose :

$$\omega(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|, (x_1, x_2) \in [0, 1]^2 \text{ et } |x_1 - x_2| \leq h\}; A_h = \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - x \right| \leq h \right\}.$$

Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$  et tout réel  $h > 0$ ,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq 2\mathbf{P}(\bar{A}_h) \|f\|_{\infty} + \mathbf{P}(A_h) \omega(h)$$

En déduire que  $(B_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$

12. ★★ THÉORÈME DE KOROVKIN —

On considère l'e.v.n.  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\infty})$ , où  $\mathbf{E}$  désigne l'espace vectoriel des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$ .

Un élément  $u$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$  est dit positif si pour tout  $f \in \mathbf{E}$ , si  $f \geq 0$  alors  $u(f) \geq 0$ .

- (a) Soit  $u$  un élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$  positif. Montrer que  $u$  est continu.
- (b) Soit  $f \in \mathbf{E}$ . Soit  $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ . Montrer qu'il existe un réel  $c > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in [0, 1]^2$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + c(x - y)^2.$$

- (c) Pour tout entier  $k \geq 0$ , notons  $e_k$  l'élément de  $E$  associé à  $X^k$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite d'opérateurs positifs. On suppose que pour  $k = 0, 1, 2$ , la suite  $(u_n(e_k))_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $e_k$  dans  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\infty})$ . Montrer que pour tout  $f \in \mathbf{E}$ , la suite  $(u_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $f$  dans  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\infty})$ , (théorème de Korovkin).
- (d) Déduire du théorème de Korovkin celui de Weierstrass.

13. ★★

- (a) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de fonctions d'une partie  $E$  de  $\mathbf{R}$ , **dénombrable** dans  $\mathbf{R}$ , telle que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f_n$  soit bornée par 1. Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  admet une suite extraite qui converge simplement sur  $E$  vers une application  $f$  de  $E$  dans  $\mathbf{R}$ .
- (b) Soit  $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite d'applications de  $\mathbf{R}$  dans  $[-1, 1]$ , toutes croissantes. Montrer qu'il existe une suite extraite de  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  qui converge simplement sur  $\mathbf{R}$ , (*Théorème de sélection de Helly*).

# Programme de colle n°15

---

## 51 Groupes, anneaux, corps

- Groupes, sous-groupes, exemples de groupes et de sous-groupes du programme de MPSI.
- Morphismes de groupes : caractérisation de l'injectivité, image directe et réciproque d'un sous-groupe, isomorphisme de groupes.
- Sous-groupes de  $\mathbf{Z}$ , groupe  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .
- Définition d'un sous-groupe engendré, ordre d'un élément, l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe.
- Groupes monogènes et cycliques. Structure des groupes monogènes.
- Anneau : sous-anneau, morphismes d'anneaux.
- Divisibilité dans les anneaux intègres. Idéal d'un anneau intègre, Idéaux de  $\mathbf{K}[X]$ .
- Dans  $\mathbf{K}[X]$  ou  $\mathbf{Z}$ , PPCM, PGCD en termes d'idéaux, théorème de Bezout, théorème de Gauss.
- Décomposition en produit d'irréductibles (existence et unicité de la décomposition dans  $\mathbf{Z}$  ou  $\mathbf{K}[X]$ . Irréductibles de  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{R}[X]$  et  $\mathbf{C}[X]$
- L'anneau  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Générateurs du groupe  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  et inversibles de l'anneau  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Equivalence de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  est intègre,  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  est un corps, et  $n$  premier ; Théorème chinois. Indicatrice d'Euler, avec expression en fonction des facteurs premiers. Théorème d'Euler.
- Algèbre, définition, sous-algèbre définition et caractérisation, morphisme d'algèbres, exemples au programme.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque  $\star$  pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon, n Félix Antoine, Raphaël Castella-cousin, Malo Le Grogne.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques  $\star\star$  Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Augustin Ravasse, Cyril Brévignon.

## 52 Questions de Cours

1. Equivalence :  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  est intègre,  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  est un corps,  $n$  premier.
2. Idéaux de  $\mathbf{K}[X]$ .

## 53 Récitation d'exercices

1. Soit  $P$  un élément de  $\mathbf{R}[X]$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $P(x) \geq 0$ . Montrer qu'il existe  $A$  et  $B$  éléments de  $\mathbf{R}[X]$  tels que :  $P = A^2 + B^2$ . simples.
2. *Révision*. Soit  $G$  un sous-groupe de  $\mathbf{R}$ . Montrer qu'il est soit dense, soit de la forme  $a\mathbf{Z}$ , où  $a$  est un réel.  
*Version  $\star\star$* . Déterminer les sous-groupes compacts de  $(\mathbf{C}, \times)$ .
3. Montrer de deux manières que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique ; qu'en déduire sur son cardinal.
4. On admet la question précédente. Soit  $G$  un groupe cyclique d'ordre  $n$ . Soit  $d_0$  un diviseur positif de  $n$ . Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de  $G$  à  $d_0$  éléments. On désigne par  $\varphi$  l'indicatrice d'Euler. Montrer que : 
$$\sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d|n}} \varphi(d) = n,$$
5.  $\star$  Retrouver l'expression de l'indicatrice d'Euler d'un entier  $n \geq 2$ , en fonction de ses facteurs premiers par un argument probabiliste.
6. Soit un entier  $n \geq 2$  Montrer que  $(n-1)! \equiv -1 [n]$ . si et seulement si  $n$  est un nombre premier.
7.  $\star$  Montrer dans le cas commutatif le cas particulier du théorème de Lagrange (cours).  
Montrer dans le cas général le théorème de Lagrange.



8. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre inférieur ou égal à 5. Quel est le cardinal minimal d'un groupe non commutatif? On utilisera l'exercice précédent.
- ★★ Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre inférieur ou égal à 7. On utilisera l'exercice précédent et le suivant.
9. ★ Soit  $(G, +)$  un groupe dont tout élément distinct de  $e_G$  est d'ordre 2. Montrer que  $(G, +)$  est commutatif. Montrer que le cardinal de  $G$  est une puissance de 2. On donnera deux preuves.
10. (a) Soient un entier  $n \geq 2$ ,  $c = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  un  $p$  cycle de  $S_n$  et  $\varphi$  un élément de  $S_n$ . Déterminer la permutation  $\varphi \circ c \circ \varphi^{-1}$ .
- (b) En utilisant la question précédente montrer que l'ensemble  $\{(1, 2, \dots, n); (1, 2)\}$  engendre  $S_n$ .
- (c) ★ On suppose  $n \geq 3$ . Montrer que l'ensemble des tricycles engendre  $A_n$ .
- (d) ★★ Quel est le nombre minimal de transpositions qui engendrant  $S_n$  ?
11. ★★ Soit  $G$  un groupe fini et  $a$  un de ses éléments. Montrer que le nombre de conjugués de  $a$  est égal à l'indice dans  $G$  du centralisateur de  $a$  (c'est-à-dire de  $\{g \in \mathbf{G} | ag = ga\}$ ).  
On suppose que  $G$  est de cardinal  $p^k$  où  $p$  est un nombre premier et  $k \in \mathbf{N}^*$ . Montrer que le centre de  $G$  est d'ordre  $p^h$  où  $h \in \llbracket 1, k \rrbracket$ .
12. (a) Soient  $a$  et  $b$  des entiers strictement positifs. Montrer l'existence de  $a'$  et  $b'$  entiers également strictement positifs tels que on ait :
- les relations de divisibilité  $a' | a, b' | b$  ;
  - l'égalité  $\text{pgcd}(a', b') = 1$  ;
  - l'égalité  $\text{ppcm}(a, b) = a'b'$ .
- Indication* : On examinera les décompositions en facteurs premiers de  $a$  et  $b$ .
- (b) ★ Soient  $g$  et  $g'$  des éléments d'un groupe abélien  $G$  d'ordres respectifs  $m$  et  $m'$ . On suppose que  $m$  et  $m'$  sont premiers entre eux. Montrer que

$$\omega(gg') = mm'.$$

Si l'on ne suppose plus  $m$  et  $m'$  premiers entre eux, a-t-on  $\omega(gg') = \text{ppcm}(m, m')$  ?

- (c) ★★ On appelle exposant du groupe  $G$  le plus petit commun multiple  $\epsilon$  des ordres des ses éléments. Dédurre de ce qui précède que  $G$  admet un élément  $z$  ayant pour ordre l'exposant du groupe  $G$ .
- (d) ★★ Montrer que le groupe multiplicatif des inversibles de  $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$  est cyclique. Soit  $K$  un corps fini. Montrer que le groupe  $(K \setminus \{0_K\}, \times)$  est cyclique.

## Programme de colle n°16

---

### 54 Groupes, anneaux, corps

- Groupes, sous-groupes, exemples de groupes et de sous-groupes du programme de MPSI.
- Morphismes de groupes : caractérisation de l'injectivité, image directe et réciproque d'un sous-groupe, isomorphisme de groupe
- Sous-groupes de  $\mathbf{Z}$ , groupe  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .
- Définition d'un sous-groupe engendré, ordre d'un élément, l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe.
- Groupes monogènes et cycliques. Structure des groupes monogènes.
- Anneau : sous-anneau, morphismes d'anneaux.
- Divisibilité dans les anneaux intègres. Idéal d'un anneau intègre, Idéaux de  $\mathbf{K}[X]$ .
- Dans  $\mathbf{K}[X]$  ou  $\mathbf{Z}$ , PPCM, PGCD en termes d'idéaux, théorème de Bezout, théorème de Gauss.
- Décomposition en produit d'irréductibles (existence et unicité de la décomposition dans  $\mathbf{Z}$  ou  $\mathbf{K}[X]$ . Irréductibles de  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{R}[X]$  et  $\mathbf{C}[X]$
- L'anneau  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Générateurs du groupe  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  et inversibles de l'anneau  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Equivalence de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  est intègre,  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  est un corps, et  $n$  premier ; Théorème chinois. Indicatrice d'Euler, avec expression en fonction des facteurs premiers. Théorème d'Euler.
- Algèbre, définition, sous-algèbre définition et caractérisation, morphisme d'algèbres, exemples au programme.

### 55 Suites et séries d'applications $\mathcal{C}^k$ , séries entières

- Convergence simple et uniforme des suites et séries d'applications, convergence normale des séries.
- Continuité de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp d'une série) d'applications continues d'un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbf{K}$  ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de  $I$ .
- Etude de la convergence de la suite des primitives d'une suite d'applications continues de  $I$  à valeurs dans  $\mathbf{K}$  ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de  $I$ . Résultat analogue pour les séries.
- Théorème de régularité de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp. d'une série) d'applications de classe  $\mathcal{C}^k$ , à valeurs dans  $\mathbf{K}$  ou un e.v. de dimension finie.
- Etude de la régularité de l'application  $\mathbf{R} \rightarrow A; t \mapsto \exp(ta)$ , où  $a$  est un élément d'une algèbre normée de dimension finie  $A$ . Application à l'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.
- *A venir : séries entières*

**Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon, n Félix Antoine, Raphaël Castella-cousin, Malo Le Grogne.**

**Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Augustin Ravasse, Cyril Brévignon.**

### 56 Questions de Cours

1. Théorème d'Euler, petit théorème de Fermat (comme corrolaire). Application montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on a :  $10^{(10^n)} = 4[7]$ .
2. Dérivabilité de l'application  $\mathbf{R} \rightarrow A; t \mapsto \exp(tM)$ , où  $M$  est un élément de algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ). Application à l'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.

### 57 Exercices

1. Soit  $P$  un élément de  $Q[X]$  irréductible. Montrer que les racines complexes de  $P$  sont simples.

2. (a) Soit l'élément  $P_0 = X^3 - X - 1$  de  $\mathbf{Q}[X]$ . Montrer que  $P_0$  n'a pas de racines rationnelles, mais une racine  $\omega$  réelle. Montrer qu'il est irréductible dans  $\mathbf{Q}[X]$ .
- (b) Soit  $K$  le sous-espace vectoriel du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbf{R}$  engendré par  $(\omega^i)_{i \in \mathbf{N}}$ . Donner une base de  $K$ . Montrer que  $K$  est un sous-corps de  $\mathbf{R}$  et le plus petit sous-corps contenant  $\omega$ .

Soient  $A$  et  $B$  des éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

3. ★ Soit  $m$  un entier supérieur ou égal à 2. On appelle racines primitives  $m^e$  de l'unité les générateurs de  $\mathbf{U}_m$ . On pose :  $\phi_m(X) := \prod_{i=1}^{h_m} (X - \xi_i)$ , où  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{h_m}$  sont les  $h_m$  racines primitives  $m^e$  de l'unité (polynôme cyclotomique). On pose également  $\phi_1(X) := X - 1$ . Montrer

$$\prod_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d|n}} \phi_d = X^n - 1$$

En déduire que  $\phi_n$  est élément de  $\mathbf{Z}[X]$ .

4. ★ Soit  $p$  un nombre premier impair et  $y$  un élément de  $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ ,

- (a) Montrer que  $\prod_{x \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*} x = \begin{cases} -y^{\frac{p-1}{2}}, & \text{si } y \text{ est un carré,} \\ y^{\frac{p-1}{2}}, & \text{sinon.} \end{cases}$

*Indication* : on pourra regrouper les éléments dont le produit vaut  $y$ .

- (b) En déduire

$$\begin{cases} y^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}, & \text{si } y \text{ est un carré,} \\ y^{\frac{p-1}{2}} = -\bar{1}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. (a) Résoudre dans  $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$  l'équation d'inconnue  $a$ ,  $a^2 - \bar{100} = \bar{0}$ .
- (b) Résoudre dans  $\mathbf{Z}/121\mathbf{Z}$  l'équation d'inconnue  $a$ ,  $a^2 - \bar{100} = \bar{0}$ .
- (c) Résoudre dans  $\mathbf{Z}/221\mathbf{Z}$  l'équation d'inconnue  $a$ ,  $a^2 + \bar{11}a - \bar{12} = \bar{0}$ .

#### RÉGULARITÉ DE SOMMES DE SÉRIES

6. Soit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$ , où pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $u_n$  désigne l'application

$$u_n : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{1}{n^x}.$$

- (a) Montrer que la série de fonctions converge simplement sur  $]1, +\infty[$ .

Nous noterons  $f$  la somme de cette série, application de  $]1, +\infty[$  dans  $\mathbf{R}$ .

- (b) Montrer que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $]1, +\infty[$ .

- (c) Donner un équivalent de  $f$  lorsque  $x$  tend vers 1 par valeurs strictement supérieures.

7. Soit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$ , où pour tout entier naturel non nul  $n \geq 2$ ,  $u_n$  désigne l'application

$$u_n : ]1, +\infty[ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \mapsto \frac{1}{n^x \ln(n)^y}.$$

- (a) Montrer que la série de fonctions converge simplement.

Nous noterons  $f$  la somme de cette série.

- (b) Montrer que  $f$  est continue.

- (c) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et préciser sa différentielle.

8. Soit  $f$  la fonction de la variable réel  $x$ , définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

- (a) Montrer que le domaine de définition de  $f$  est un intervalle de la forme  $[a, +\infty[$  à déterminer.

- (b) Montrer que  $f$  est continue sur  $[a, +\infty[$  et que sa restriction à  $]a, +\infty[$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

- (c) Etudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

- (d)  $f$  est-elle dérivable en  $a$ ?

9. ★ On dit qu'un polynôme non nul élément de  $\mathbf{Z}[X]$  est primitif si le pgcd de ses coefficients est 1.

- (a) Montrer que le produit de polynômes non nuls  $P$  et  $Q$  éléments de  $\mathbf{Z}[X]$  primitifs est primitif.

- (b) On appelle contenu un polynôme  $P$  non nul élément de  $\mathbf{Z}[X]$ , le pgcd de ses coefficients, et on note  $c(P)$  cette quantité. Montrer que pour des polynômes non nuls  $P$  et  $Q$  éléments de  $\mathbf{Z}[X]$ ,

$$c(PQ) = c(P)c(Q).$$

- (c) **★★** Soient  $A \in \mathbf{Z}[X]$  primitif, non irréductible dans  $\mathbf{Q}[X]$  et non constant. Montrer qu'il est le produit de deux éléments de  $\mathbf{Z}[X]$  de degrés strictement inférieurs à celui de  $A$ . en déduire les éléments irréductibles de  $\mathbf{Z}[X]$  en fonction de ceux de  $\mathbf{Q}[X]$ .
- (d) Soient  $p$  un nombre premier et  $P \in \mathbf{Z}[X]$  non constant,  $P$  s'écrit  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ . On suppose :
- i.  $p$  ne divise pas  $a_n$  ;
  - ii.  $p$  divise  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  ;
  - iii.  $p^2$  ne divise pas  $a_0$ .

Montrer que  $P$  est irréductible dans  $\mathbf{Q}[X]$  (critère d'Eisenstein). Étudier l'irréductibilité de  $X^n - 2$  dans  $\mathbf{Q}[X]$ .

10. **★★** Soit  $P$  un polynôme unitaire de  $\mathbf{Z}[X]$ . On suppose que  $P$  est le produit dans  $\mathbf{Q}[X]$  de deux polynômes unitaires  $A$  et  $B$  Montrer que  $A$  et  $B$  sont éléments de  $\mathbf{Z}[X]$ . En déduire qu'il existe une matrice  $M$  à coefficients entiers, diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  et dont le polynôme caractéristique est  $P$ .
11. **★** Soient  $p$  un nombre premier et  $k \in \mathbf{N}^*$ . Montrer que :

$$\sum_{a \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} a^k = \bar{0} \text{ ou } -\bar{1}.$$

Préciser à quelle condition on est dans l'un ou l'autre cas (on pourra regarder si  $p - 1$  divise  $k$  ou non).

12. **★★** Soit  $K$  un corps.
- (a) Montrer que l'application  $\phi : \mathbf{Z} \rightarrow K, k \mapsto k \cdot 1_k$  est un morphisme d'anneaux.
  - (b) On suppose que son noyau est non trivial.
  - (c) Montrer qu'il existe un nombre premier  $p$  tel que le plus petit sous-corps de  $K$  soit isomorphe à  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ .  
Q'en déduire sur le cardinal d'un corps fini ?
  - (d) Que dire du plus petit sous-corps de  $K$  lorsque l'on suppose  $\ker \phi$  trivial.

## Programme de colle n°17

---

### 58 Suites et séries d'applications de classe $\mathcal{C}^k$

- Continuité de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp d'une série) d'applications continues d'un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbf{K}$  ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de  $I$ .
- Etude de la convergence de la suite des primitives d'une suite d'applications continues de  $I$  à valeurs dans  $\mathbf{K}$  ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de  $I$ . Résultat analogue pour les séries.
- Théorème de régularité de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp d'une série) d'applications de classe  $\mathcal{C}^k$ , à valeurs dans  $\mathbf{K}$  ou un e.v. de dimension finie.
- Etude de la régularité de l'application  $\mathbf{R} \rightarrow A; t \mapsto \exp(ta)$ , où  $a$  est un élément d'une algèbre normée de dimension finie  $A$ . Application à l'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.

### 59 Séries entières

- Définition du rayon de convergence (lemme d'Abel).
- Sommes et produits de séries entières, rayons de convergence de la série somme et de la série produit.
- Séries entières dérivée et produit, rayons de convergence de la série dérivée et de la série produit.
- Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle (dérivation et primitivation termes à termes).
- Théorème d'Abel.
- Fonctions développables en séries entières. Définition. Unicité du développement en série entière, série de MacLaurin. Exemples au programme.
- Fonction génératrice d'une variable aléatoire. Application au calcul de l'espérance et de la variance, application à la loi géométrique. (*Le cours de probabilité n'a pas été traité, les exercices resteront très élémentaires*).
- *À venir réduction des endomorphismes, le retour.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque  $\star$  pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon, n Félix Antoine, Raphaël Castella-cousin, Malo Le Grogneç.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques  $\star\star$  Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Augustin Ravasse, Cyril Brévignon.

### 60 Questions de cours

1. Rayon de convergence de la série somme et de la série produit.
2. Rayon de convergence de la série dérivée et primitive.

### 61 Exercices

1. Soit la série d'applications,  $\sum_{n \geq 2} u_n$ , où pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $u_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$ .
  - (a) Montrer que la série converge simplement sur  $[-1, 1]$ . Notons  $f$  sa somme, (définie sur  $[-1, 1]$ ).
  - (b) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
  - (c) Montrer que  $f$  est somme de sa série de MacLaurin. Donner le développement de  $f$  en série entière au voisinage de 0.
  - (d)  $\star$  Retrouver ce résultat par une autre méthode.

2. (a) Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  non nul. Montrer que la série entière  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$  a un rayon de convergence infini.
- (b) Soit  $a$  un entier. Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $a_n$  désigne la  $n^{\text{e}}$  décimale de  $\sqrt{a}$ . Déterminer le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ .

### 3. Révision

Montrer qu'un élément  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  est inversible dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  si et seulement si  $\det(A) = \pm 1$ .

*Application* Déterminez tous les triplets d'entiers relatifs  $(a, b, c)$  tels que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 6a & 3b & 5c \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

soit inversible dans  $\mathcal{M}_3(\mathbf{Z})$ .

*Application*  $\star$  Des éléments  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  sont dit semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  si il existe un élément  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  inversible d'inverse élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  tel que  $A = PBP^{-1}$ .

Pour tout entier  $a$ , On note  $S_a$  l'élément de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- (a)  $S_0$  et  $S_1$  sont-elles semblables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbf{Q})$  ?
- (b)  $S_0$  et  $S_1$  sont-elle semblables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$  ?
- (c) Soit  $A$  une matrice élément de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$  de polynôme caractéristique  $(X^2 - 1)$ . Montrer qu'elle est semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  à une matrice triangulaire supérieure.
4.  $\star$  Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de la variable réelle  $z$ , de rayon de convergence égal à 1. On note  $S$  sa somme. On suppose que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a_n \geq 0$  et que la série complexe  $\sum a_n$  diverge. Montrer que  $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1, x \in [0, 1[} +\infty$ .

On suppose que  $a_n$  est élément de  $\mathbf{N}$ , pour tout entier naturel  $n$ . Montrer que si  $f$  est bornée sur  $B_o(0, 1)$ , alors c'est un polynôme.

### 5. $\star\star$ Suite de la question précédente

Soit  $\sum b_n z^n$  une série entière de la variable complexe  $z$ , de rayon de convergence 1. On note  $g$  sa somme. On suppose que  $b_n \in \mathbf{Z}$ , pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , et que  $g$  est bornée sur  $B_o(0, 1)$ . Montrer que  $g$  est un polynôme.

On pourra montrer que pour tout élément  $r$  de  $]0, 1[$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

6.  $\star$  Pour tout entier  $n \geq 1$ , on appelle dérangement de  $\{1, \dots, n\}$  toute permutation de  $\{1, \dots, n\}$  sans point fixe, et on note  $d_n$  le cardinal de l'ensemble des dérangements de  $\{1, \dots, n\}$ ; enfin on pose  $d_0 = 1$ . Soit la série entière :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n.$$

Montrer que son rayon n'est pas nul; déterminer sa somme. En déduire son rayon et que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$d_n = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}.$$

## 7. THÉORÈME DE LIOUVILLE —

Soit une série entière  $\sum a_n z^n$  de la variable complexe  $z$ , de rayon de convergence  $R$  non nul. On note  $f$  sa somme :  $f : B_o(0, R) \rightarrow \mathbf{C}$ ;  $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ .

- (a) Soit  $p$  un entier  $n \geq 0$  et un réel  $r$  tel que  $0 < r < R$ . Exprimer  $a_p$  au moyen de  $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta$ .
- (b) On suppose que  $R = +\infty$ . Montrer que si  $f$  est bornée sur  $\mathbf{C}$ , alors  $f$  est constante.
8. Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par,  $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ . Développer  $f$  en série entière au voisinage de 0.
- Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par,  $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x+2)^2}$ . Développer  $f$  en série entière au voisinage de 0.

9. Calculer la somme de la série entière de la variable réelle  $t$ ,  $\sum (n^3 + 2n + 5)t^n$ , puis de  $\sum \frac{n+1}{(n+2)n!} t^n$ .
10. \*\* Soit  $f$  une application d'un ouvert convexe dans  $\mathbf{C}$  développable en série entière au voisinage de chaque point. On veut montrer que si  $|f|$  admet un maximum local en un point  $z_0$ , alors  $f$  est constante.
- (a) On suppose que  $f$  n'est pas constante. Soit  $\sum a_n(z - z_0)^n$  la série de Taylor de  $f$  au voisinage de  $z_0$ . Montrer qu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $a_n \neq 0$ . On note  $k$  le plus petit élément  $n$  de  $\mathbf{N}^*$  tel que  $a_n \neq 0$ .
- (b) On notera, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\rho_n$  le module de  $a_n$ ,  $\theta_n$  son argument, élément de  $] - \pi, +\pi]$ . Pour  $r \in \mathbf{R}_+^*$  et  $\phi \in ] - \pi, +\pi]$ , montrer que

$$f(z_0 + re^{i\phi}) = \rho_0 e^{i\theta_0} + \rho_k r^k e^{i(\theta_k + k\phi)} + o(r^k) (r \rightarrow 0).$$

- (c) Conclure par un choix inspiré de  $\phi$ .
- (d) A quelle condition  $|f|$  peut-elle admettre un minimum local.
11. \*\* — THÉORÈME DE BIBERBACH RÉEL (DIEUDONNÉ) —  
Soit  $f$  la somme d'une série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ , de rayon de convergence  $R$  supérieur ou égal à 1 de la variable complexe  $z$ . On suppose que tous les coefficients de la série entière sont réels, que  $a_1 = 1$  et que la restriction de  $f$  à  $D_o(0, 1)$  est injective.
- (a) Soit  $z_0$  un élément de  $D_o(0, 1)$ ; montrer que  $f(z_0)$  est réel si et seulement si  $z_0$  est réel. En déduire que si  $\text{Im}(z_0) \geq 0$  alors  $\text{Im}(f(z_0)) \geq 0$ .
- (b) Calculer pour tout élément de  $]0, 1[$  et tout entier  $n \geq 0$ ,

$$\int_0^\pi \text{Im}(f(re^{i\theta}) \sin(n\theta)) d\theta.$$

- (c) Déduire de ce qui précède que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $|a_n| \leq n$ .  
*Indication* on pourra montrer que  $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$ , pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout réel  $\theta$ .
- (d) La majoration est-elle optimale?

# Programme de colles prévisionnel n°18

## 62 Polynômes d'endomorphismes

Par  $u$  on désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$  et par  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

- Polynôme en  $u$  en  $M$  : la substitution dans un polynôme de l'indéterminée par  $U$  ou  $M$  est un morphisme d'algèbres.
- Si  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  ( $M$ ) alors  $p(\lambda)$  est valeur propre de  $P(u)$  ( $p(M)$ ).
- Idéal annulateur de  $u$  ( $M$ ). Définition du polynôme minimal  $\mu_u$ . Polynôme minimal d'un endomorphisme induit, les valeurs propre de  $u$  ( $M$ ) sont racines de tout polynôme anulateur. Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres. Si  $d$  est le degré de  $\mu_u$ ,  $(u^0, \dots, u^{d-1})$  est une base de  $\mathbf{K}[u]$ . Théorème de Cayley-Hamilton.
- Lemme des noyaux. Si  $u$  admet un polynôme caractéristique scindé, alors  $\mathbf{E}$  est la somme d'espaces stables sur lesquels,  $u$  induit la somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent, application matricielle, dimension des sous-espaces caractéristiques.
- Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si il annule un polynôme scindé.
- l'endomorphisme  $u$  (la matrice  $M$ ) est diagonalisable si et seulement si il annule un polynôme simplement scindé. Un endomorphisme induit par un endomorphisme est diagonalisable,  $u$  ( $M$ ) est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.
- *À venir : intégrale à paramètre.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque  $\star$  pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon, Félix Antoine, Raphaël Castella-cousin, Malo Le Grogneec.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques  $\star\star$  Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Augustin Ravasse, Cyril Brévignon.

## 63 Questions de cours

1. L'ensemble des polynômes annulateurs d'un endomorphisme est un idéal non trivial, définition du polynôme minimal, racine de celui-ci.
2. Lemme des noyaux (pour deux polynômes).
3. L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement si il annule un polynôme simplement scindé.

## 64 Exercice

1. Soient  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans  $\mathbf{N}$ , et  $T$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}$  indépendante des précédentes. On note  $G_X$  la fonction génératrice commune à toutes les  $X_n$ .  
Pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $\omega \in \Omega$ , on pose  $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$  et  $S_0(\omega) = 0$ , puis  $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$ .  
(a) Montrer l'égalité  $G_S = G_T \circ G_X$ .  
(b) En déduire que, si  $T$  et les  $X_n$  sont d'espérance finie, alors  $S$  aussi et  $E(S) = E(T)E(X_1)$ .
2. Soient  $r$  un élément de  $\mathbf{N}^*$  et  $(a_1, \dots, a_r)$  un élément de  $(\mathbf{N}^*)^r$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $p_n$  le nombre de solutions dans  $\mathbf{N}^r$  de l'équation d'inconnue  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ,

$$a_1 x_1 + \dots + a_r x_r = n. \tag{9}$$

Montre que la somme de la série génératrice de la suite  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  coïncide sur  $] -1, 1[$  avec une fraction rationnelle à préciser. *Application* : Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , l'entier  $p(n)$  dans le cas où  $r = 2$ ,  $a_1 = 1$  et  $a_2 = 2$ .



3.  $\star$  On garde les notations précédentes
- (a) Déterminer dans le cas où  $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 1$ , pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , le nombre  $p_n$ , en utilisant la série génératrice puis en utilisant les mots à  $n + r - 1$  lettres sur l'alphabet  $\{[, -\}$  ayant exactement  $r - 1$  fois la lettre «  $-$  ».
- (b)  $\star\star$  On suppose  $a_1, a_2, \dots, a_r$  premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que  $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} cn^{r-1}$ , où  $c$  est un réel à déterminer.
4. Soit  $M$  un élément de  $\text{GL}_n(\mathbf{C})$ . On suppose que  $M^3$  est diagonalisable. Montrer que  $M$  est diagonalisable.  
*(Version  $\star$ )* Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . On suppose que  $M^3$  est diagonalisable et que  $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^3)$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable.  
*(Version  $\star\star$ )* Soit  $q$  un élément de  $\mathbf{C}[X]$ . On suppose que  $q(M)$  est diagonalisable et  $q'(M)$  inversible. On se propose de montrer que  $M$  est diagonalisable.
- (a) On considère un élément  $p$  de  $\mathbf{C}[X]$  à racines simples tel que  $p \circ q(M) = 0_n$ . On note  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  les racines, deux à deux distinctes de  $p$ . En considérant les polynômes  $(q - \beta_1), (q - \beta_2), \dots, (q - \beta_k)$ , montrer que toute valeur propre  $\alpha$  de  $M$  est racine simple de  $p \circ q$ .
- (b) Conclure en considérant le polynôme minimal de  $M$ .
5. Soit  $n$  un entier strictement positif et soient  $A$  et  $B$  des éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  tous deux diagonalisables. On suppose que  $A^5 = B^5$  (resp. version  $\star$ ,  $\exp(A) = \exp(B)$ ). En comparant les espaces propres de  $A$  et de  $A^5$  (resp.  $\exp(A)$ ) montrer que  $A = B$ . Reprendre la question précédente en montrant que  $A$  est un polynôme en  $A^5$  (resp.  $\exp(A)$ ).
6. Soit  $M$  un élément non nul de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ , tel que  $M^3 = -M$ . Montrer que  $M$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On donnera une méthode par diagonalisation dans  $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ .

$\star$  donner une méthode n'utilisant que  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ .

7. Déterminer le rang maximum d'une matrice élément de  $\mathcal{M}_7(\mathbf{R})$  qui vérifie

$$M^3 = -M^2 - M.$$

8. Soient  $n$  un entier strictement positif,  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et  $B$  l'éléments de  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{K})$ ,  $\begin{pmatrix} 0_n & 2A \\ 4A & -2A \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $B$  est diagonalisable.
9. Déterminer les sous-espaces de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$  stables par l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  où :
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
10.  $\star$
- (a) Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  est un fermé. Montrer que  $0_n$  est adhérent à la classe de similitude d'un élément  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  si et seulement si  $M$  est nilpotente.
- (b) Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

11. LE RETOUR DE LA MATRICE COMPAGNON — Soient un entier  $n \geq 2$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  des éléments de  $\mathbf{K}$

$$\text{et } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \text{ Donner par le calcul le polynôme caractéristique de } M.$$

12.  $\star$  Retrouver ce résultat sans calculs en utilisant le polynôme minimal de  $M$ .
13. Soit  $u$  et  $v$  des endomorphismes diagonalisables d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $\mathbf{E}$  de dimension finie  $n$  non nulle, qui commutent. Montrer qu'ils sont codiagonalisables. Même question pour une famille quelconque  $(u_i)_{i \in I}$  d'endomorphismes diagonalisables.
14.  $\star$  Soit l'application  $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) ; M \mapsto (\text{tr}(M), \text{tr}(M^2), \dots, \text{tr}(M^n))$ .

- (a) Montrer que  $\varphi$  est différentiable et calculer sa différentiel en un point quelconque  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .
  - (b) Montrer que pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ,  $\text{rg}(d\varphi)(M) = \text{deg}(\mu_M)$ .
  - (c) Montrer que l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  dont le polynôme minimal est le polynôme caractéristique est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .
15. **★★** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle  $n$  sur le corps  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .
- (a) Montrer que tout vecteur  $\vec{x}$  de  $\mathbf{E}$ , l'ensemble  $\mathfrak{I}_{\vec{x}}$  des polynômes  $P$ , éléments de  $\mathbf{K}[X]$  tels que  $P(u)(\vec{x}) = \vec{0}$  est un idéal non nul de  $\mathbf{K}[X]$ .  
On notera  $\pi_{\vec{x}}$  son générateur unitaire.
  - (b) Montrer qu'il existe un élément  $\vec{a}$  de  $\mathbf{E}$  tel que  $\pi_{\vec{a}} = \mu$ .
  - (c) Montrer que l'ensemble  $A$  des éléments  $\vec{x}$  tel que  $\pi_{\vec{x}} = \mu$  est un ouvert dense.

## CORRECTION DE LA QUESTION 8

La détermination des sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable est simple. Nous verrons prochainement le cas général qui offre plus de difficultés ?

Les éléments de  $\mathbf{R}^4$  seront notés en colonne.

L'endomorphisme  $f$  de  $\mathbf{R}^n$  canoniquement associé à  $A$  laisse stable les deux plans  $\text{vect}(E_1, E_2)$  et  $\text{vect}(E_3, E_4)$  l'examen des endomorphismes induits sur ces plans fournit une base de vecteurs propres et les trois valeurs propres 1, 2 et 3 :

$$\mathbf{E}_1(f) = \text{vec}((0, 0, 1, 1)^\top); \mathbf{E}_2(f) = \text{vec}((1, 1, 0, 0)^\top); \mathbf{E}_3(f) = \text{vec}((1, 2, 0, 0)^\top); (0, 0, 1, -1).$$

### • DROITE STABLES

Le cas des droites stables est particulièrement simple que la matrice soit ou non diagonalisable.

Les droites stables, sont les droites dirigées par un vecteur propre (droites propres). En effet une droite propre est stable (les espaces propres sont des sous-espaces vectoriels) ; soit réciproquement  $D$  une droite stable, en appelant  $U$  un de ses vecteurs directeurs, on a  $AU$  élément de  $D$  donc de la forme  $kU$ , avec  $k$  un réel, ce qui fait de  $U$  un vecteur propre.

On obtient ainsi toute les droites propres :

- $D = \text{vec}((0, 0, 1, 1)^\top)$  ;
- $D' = \text{vec}((1, 1, 0, 0)^\top)$  ;
- les droites  $D_t$ , avec  $t \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ , où  $D_t = \text{vec}(t(1, 2, 0, 0)^\top + (0, 0, 1, -1)^\top)$  pour tout réel  $t$  et  $D_\infty = \text{vec}((1, 2, 0, 0)^\top)$ .

Soit plus généralement un sous-espace  $F$  stable par  $f$ . Alors le corollaire du théorème de diagonalisation par annulation d'un polynôme simplement scindé dit que l'endomorphisme  $g$ , induit par  $f$  sur  $F$  est diagonalisable.

$$\text{Donc } F = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(g)} \mathbf{E}_\lambda(g).$$

Mais pour élément  $\lambda$  de  $\text{sp}(g)$  est est *a fortiori* élément de  $\text{sp}(f)$  et

$$\mathbf{E}_\lambda(g) = \mathbf{E}_\lambda(f) \cap F.$$

Donc

$$F = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3, \tag{10}$$

où pour  $i = 1, 2, 3$   $F_i$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{E}_i(f)$  éventuellement nul dans le cas où  $i$  n'est pas valeurs propre de  $g$ .

Réciproquement tout sous-espace vectoriel de  $\mathbf{C}^4$  de la forme (10) est clairement stable par  $f$ .

Appliquons.

### • PLANS STABLES

Les plans stables pas  $f$  sont les sous-espaces vectoriels suivants :

- $D \oplus D'$  ;
- $D \oplus D_t$  ;  $t \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  ;
- $D' \oplus D_t$  ;  $t \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  ;
- $\mathbf{E}_3(f)$ .

### • HYPERPLANS STABLES

Les espaces stables pas  $f$  de dimension 3 sont les sous-espaces vectoriels suivants :

- $D \oplus D' \oplus D_t$  ;  $t \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$  ;
- $D \oplus \mathbf{E}_3(f)$  ;
- $D' \oplus \mathbf{E}_3(f)$ .

## Programme de colle n°19

---

### 65 Complément sur l'intégrale

- Théorème de convergence dominée de Lebesgue.
- Théorème de Fubini-Tonelli pour l'interversion  $\int/\sum$  (fonctions positives).
- Théorème d'interversion d'une intégrale et de la somme d'une série de fonctions  $\sum u_n$ , lorsque pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est continue par morceaux intégrable et  $\sum \int_I |u_n|$  converge.
- Utilisation du théorème de Lebesgue pour l'interversion  $\int/\sum$ .
- Explicitation du reste pour l'interversion  $\int/\sum$  (cas géométrique).
- Théorème de continuité d'une intégrale sur un intervalle quelconque dépendant d'un paramètre.
- Théorème de dérivation d'une intégrale sur un intervalle quelconque dépendant d'un paramètre, généralisation à la classe  $\mathcal{C}^k$ .

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque  $\star$  pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon, Félix Antoine, Raphaël Castella-cousin, Malo Le Grogne.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques  $\star\star$  Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Augustin Ravasse, Cyril Brévignon.

### 66 Questions de cours

1. *Révision.* Soit  $M \in \mathcal{M}(R)$ . Montrer que :  $\mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ;  $t \mapsto \exp(tM)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et donner sa dérivée.

### 67 Exercices

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On note les éléments de  $\mathbf{R}^n$  en colonne, et on muni cet espace du produit scalaire canonique.
  - (a) Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ . Montrer que  $F$  est stable par  $A$  si et seulement si  $F^\perp$  est stable par  $A^\top$ .
  - (b) **Application.** On suppose que  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ . Déterminer les plans stables par  $A$ .
  - (c) Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3. Montrer qu'il admet un plan stable.
2.  $\star$  Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de permutation soit diagonalisable.
3.  $\star$  Soient  $A \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$  à valeur et  $p \in \mathbf{N}$ . Montrer qu'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  tel que  $B^p = A$ .
4. Soient  $A$  et  $B$  des éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Montrer que l'équation d'inconnue  $X$

$$AX - XB = Y$$

admet une solution quel que soit l'élément  $Y$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  si et seulement si  $A$  et  $B$  n'ont pas de valeurs propre commune.

*Indication.* On considérera l'application  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ;  $X \mapsto AX - XB$ .

5.  $\star$  Par  $G$  on désigne un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbf{K})$ . Nous supposons donc qu'il existe un entier naturel  $N$  non nul tel que pour tout élément  $A$  de  $G$ ,  $A^N = I_n$ .  
Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  engendré par  $G$ . On se donne  $(M_1, \dots, M_m)$  une base de  $\mathbf{F}$ , constituée d'éléments de  $G$  et l'application  $f : G \rightarrow \mathbf{C}^m$ ;  $A \mapsto (\text{Tr}(AM_1), \dots, \text{Tr}(AM_m))$ 
  - (a) Soient  $A$  et  $B$  des éléments de  $G$  tels que  $f(A) = f(B)$ . Montrer que pour tout élément  $M$  de  $F$ ,  $\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(BM)$ .
  - (b) Montrer que  $f$  est injective.

(c) Montrer que  $G$  est fini.

6. Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}$ , continue et bornée. Pour tout entier naturel  $n$ , justifier l'existence de  $J_n = n \int_0^{+\infty} e^{-n^2 t^2} f(t) dt$ .

Montrer, par un raisonnement élémentaire que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$  a une limite à déterminer.

7. QUAND FUBINI SÉRIE/INTÉGRALE NE S'APPLIQUE PAS ! —

Montrer l'existence de  $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$  et donner deux méthodes pour exprimer cette intégrale à l'aide de la somme d'une série.

8. Montrer que la fonction de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\cosh t} dt$ , est définie sur  $\mathbf{R}$ .

Montrer que  $f$  est développable en séries entières et exprimer son développement.

9. FUBINI INTÉGRALE/INTÉGRALE — Soit  $f$  une application de  $[a, b] \times [c, d]$  dans  $\mathbf{R}$  continue, où  $[a, b]$  et  $[c, d]$  sont des segments non réduits à un point.

Montrer que

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

10. Soient  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $a$  un réel. On suppose que  $f(a) = 0$ .

(a) Montrer qu'il existe  $g$  élément de  $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = (x - a)g(x)$

(b) On suppose de plus que  $f'(a) = 0$ , Montrer qu'il existe  $g$  élément de  $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = (x - a)^2 g(x)$

11. Montrer la convergence de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  et donner sa valeur.

*Indication* : on étudiera les applications  $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$  et  $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$

12. Soit la fonction de la variable réel  $x$  définie par :  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ . Déterminer son domaine de définition  $D$  et montrer qu'elle est  $\mathcal{C}^\infty$  sur son domaine de définition. Pour tout  $x \in D$  montrer que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . Donner les variations de  $\Gamma$  ainsi que la limite en  $+\infty$  et un équivalent en  $0^+$ .

13.  $\star$ . On note les  $n$ -uplets de réels en colonne et on munit  $\mathbf{R}^n$  du produit scalaire canonique  $(\cdot | \cdot)$ .

Soit  $F$  une application de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^2$

(a) On suppose  $n = 2$  que pour tout  $X \in \mathbf{R}^2$ , la matrice  $J_F(X)$  est symétrique.

Montrer que  $F$  dérive d'un potentiel.

(b) *version  $\star$*  On garde  $n$  quelconque et  $F$  est définie sur un ouvert étoilé de  $\mathbf{R}^n$ .

(c) On suppose (pour  $n$  quelconque) que pour tout  $X \in \mathbf{R}^n$ , la matrice  $J_F(X)$  est antisymétrique.

Montrer que  $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ;  $X \mapsto BX + C$ , où  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$  et  $C \in \mathbf{R}^n$ .

14. (a) Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On note  $\mu$  son polynôme minimal et  $\mu_{\mathbf{C}}$  son polynôme minimal lorsque l'on considère cette matrice comme élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Montrer que  $\mu = \mu_{\mathbf{C}}$ .

(b)  $\star\star$  Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ . On note  $\mu$  son polynôme minimal et  $\mu_{\mathbf{R}}$  son polynôme minimal lorsque l'on considère cette matrice comme élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Montrer que  $\mu = \mu_{\mathbf{R}}$ .

15.  $\star\star$  Soit  $A$  élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . On appelle commutant de  $A$  l'ensemble, noté  $\mathcal{C}(A)$ , des éléments  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  tels que  $AM = MA$ .

(a) Montrer que  $\mathcal{C}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  qui contient  $\mathbf{C}[A]$ . Montrer que la dimension de  $\mathcal{C}(A)$  est au moins  $n$ .

*Indication* : on pourra par exemple étudier la dimension de  $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbf{C})$ .

(b) Montrer que si  $\mathcal{C}(A) = \mathbf{C}[A]$  alors  $\chi_A = \mu_A$ . Que dire de la réciproque.

**Indications pour la question 8.**

Soient  $x \in \mathbf{R}$  et  $g : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}; t \mapsto \frac{\cos(tx)}{\text{cht}}$ . L'application  $g$  est continue (par morceaux) et intégrable au voisinage de  $+\infty$  puisque majorée par  $2\exp(-\cdot)$ , application notoirement intégrable au voisinage de  $+\infty$ .

Par ailleurs en posant pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$u_n : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}; t \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n} t^{2n}}{(2n)! \text{cht}},$$

la série  $\sum u_n$  converge simplement de somme  $g$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  la fonction  $u_n$  est intégrable, car lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , on a  $u_n(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . Enfin pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt \leq \frac{2x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} \exp(-t) dt = \frac{2x^{2n}}{(2n)!} \Gamma(2n) = 2 \frac{x^{2n}}{2n} \leq x^{2n}, \quad (11)$$

et donc en supposant  $|x| < 1$ , la série  $\sum \int_{\mathbf{R}_+} |u_n|$  converge car son terme général est majorée par celui d'une série géométrique convergente.

Le théorème d'interversion série/intégrale affirme que, toujours dans le cas où  $|x| < 1$  :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où  $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)! \text{cht}} dt$ .

Donc  $f$  est développable en séries entières au moins sur  $] -1, 1[$ .

**Indications pour la question 11**

Soit  $x \in \mathbf{R}_+^*$

Soit  $t_0 \in \mathbf{R}_+^*$ . Pour tout  $n \geq t_0$ , on a :

$$f(t_0) = t_0^{x-1} \left(1 - \frac{t_0}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t_0^{x-1} e^{-t_0}.$$

Autant dire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge simplement vers  $f$ , où  $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}, t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ .

Soient  $t \in \mathbf{R}_+^*$  et  $n \in \mathbf{N}$ , par convexité du logarithme et croissance de l'exponentiel, si  $t \leq n$  alors

$$u_n(t) = t^{x-1} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leq t^{x-1} \exp\left(n - \frac{t}{n}\right) = f(t);$$

si  $t \geq n$  alors la précédente majoration est trivialement vraie ( $f \geq 0$ ). De plus  $f$  est — on l'a vu — intégrable sur  $\mathbf{R}_+^*$ .

Donc  $\int_0^{+\infty} u_n(t) dt$  tend vers  $\int_0^{+\infty} f = \Gamma(x)$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , par le théorème de convergence de Lebesgue.

La fin est asinitrottante.

## Programme de colle n°20

---

### 68 Complément sur l'intégrale

Révision du programme de la précédente semaine.

### 69 Complément sur l'intégrale

### 70 Révisions de MPSI sur les espaces préhilbertiens

- Produit scalaire, propriétés, formules de polarisations, égalité du parallélogramme. Formule de Cauchy-Schwarz cas d'égalité, norme associée à un produit scalaire.
- Supplémentaire orthogonal, quand il existe il est unique et c'est l'orthogonal, existence pour un sous-espace de dimension finie, théorème de projection sur un sous-espace de dimension finie.
- Étude sur des exemples de familles de polynômes orthogonaux.
- *Les suites totales orthonormées, inégalité de Bessel, égalité de Parseval ne sont plus au programme.*
- *À venir, Espaces euclidien*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon, n Félix Antoine, Raphaël Castella-cousin, Malo Le Grogneç.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Augustin Ravasse, Cyril Brévignon.

### 71 Questions de cours

1. Inégalité de Cauchy et Schwarz pour une forme bilinéaire positive. Cas d'égalité.
2. Existence d'un supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien. Théorème de projection sur ce sous-espace.

### 72 Récitation d'exercice

1. On suppose qu'il existe un réel  $p_0$  tel que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) \exp(-p_0 x) dx$  converge.
  - (a) Montre que pour tout réel  $p > p_0$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) \exp(-p) dx$  converge.
  - (b) Montrer que l'application  $\mathcal{L}(f) : [p_0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}; p \mapsto \int_0^{+\infty} f(x) \exp(-px) dx$ , est continue en  $p_0$ .
2. Montrer que la convergence et donner la valeur de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  (intégrale de Dirichlet), on utilisera la précédente question.
3. \* En considérant les suites  $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définies par :  $\forall n \in \mathbf{N}; I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx$ ,  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx$ , retrouver la valeur de l'intégrale de Dirichlet.
4. TRANSFORMÉE DE FOURIER — Soit l'application.  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}; x \mapsto \exp(-x^2)$ , Montrer que pour tout réel  $k$  est définie la quantité :  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i2\pi kt) dt$ , noté  $\hat{f}(k)$ . Montrer que l'application  $\hat{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}; k \mapsto \hat{f}(k)$  est dérivable et donner sa dérivée. En déduire  $\hat{\hat{f}}$ .
5. \* Montrer que

$$\tilde{\Gamma} : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_- \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

est un prolongement indéfiniment dérivable de  $\Gamma$ .

Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , continue et  $2\pi$ -périodique. On considère les suites d'applications réels  $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$  où pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$S_n : \mathbf{R} \ni x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t); M_n : \mathbf{R} \ni x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t),$$

où  $D_n$  et  $F_n$  sont les éléments de  $\mathcal{C}^0(\mathbf{R})$  tels que pour tout réel  $x$  non congru à 0 modulo  $2\pi$ ,

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}; F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2\left(n\frac{x}{2}\right)}{n \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On admet que  $\int_{[-\pi, \pi]} D_n = \int_{[-\pi, \pi]} F_n = 1$ .

6. On suppose de plus  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ .
7.  $\star$  On ne suppose plus  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , montrer en utilisant le théorème de convergence dominée que pour tout réel  $x$ ,  $M_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ .
8.  $\star$  Montrer que  $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge uniformément vers  $f$ .
9. Soit  $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel. On appelle déterminant de Gram d'une famille  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  d'éléments de  $\mathbf{E}$  (où  $n \in \mathbf{N}^*$ ), le déterminant de la matrice  $(\langle x_i | x_j \rangle)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$  (matrice de Gram), on le notera  $\text{Gram}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ .
  - a) Soit  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  une famille d'éléments de  $\mathbf{E}$ . Montrer que cette famille est libre si et seulement si,  $\text{Gram}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \neq 0$ .
  - b) Soit  $\mathbf{F}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{E}$ . Soient  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $\mathbf{F}$ , et  $\vec{a}$  un élément de  $\mathbf{E}$  montrer que :

$$\frac{\text{Gram}(\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)}{\text{Gram}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)} = d(\vec{a}, \mathbf{F})^2.$$

10. Soit  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien. Soit  $\mathbf{F}$  un espace de dimension  $n$  contenant ces vecteurs et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $\mathbf{F}$ . On note  $A$  la matrice de la famille  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  dans  $\mathcal{B}$ . Exprimer  $\text{Gram}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  en fonction de  $A$ . Retrouver le 32. a)
 

Interpréter pour  $n = 2$  géométriquement le (b).

Par un choix judicieux de  $\mathcal{B}$  montrer que

$$0 \leq \text{Gram}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \leq \prod_{i=1}^n \|\vec{x}_i\|^2.$$

Dans quel cas a-t-on égalité!

11. On note  $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ . On munit  $\mathbf{E}$  du produit scalaire  $\langle f | g \rangle = \int_{[-1, 1]} fg$ , la norme associée sera notée  $\|\cdot\|$ . Montrer qu'il existe une et une seule famille  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de polynômes unitaires, orthogonale et échelonnée. Donner une formule de récurrence définissant la famille.
12. (Suite de la question précédente) Soit  $f \in \mathbf{E}$ . Montrer que si l'on pose pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $p_n^* = \frac{p_n}{\|p_n\|}$  et  $c_n(f) = \langle f | p_n^* \rangle$ , alors la série  $\sum c_n(f)p_n^*$  converge dans l'espace vectoriel normé  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$  vers  $f$ .  
Montrer la convergence de la série  $\sum c_n(f)^2$  et donner sa somme, puis celle de  $\sum c_n(f)c_n(g)$  ( $g \in \mathbf{E}$ ).
13. Soit  $(\Omega, \mathbf{P})$  un espace probabilisé fini. Montrer que  $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$ .
14. Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x} |x^2 + ax + b|^2 dx, (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

admet une borne inférieure à déterminer.

15.  $\star\star$  Notons  $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ . Soient un réel  $C > 0$  et  $\mathbf{F}$  un sous espace vectoriel de  $\mathbf{E}$  tel que :

$$\|f\|_{\infty} \leq C\|f\|_2,$$

pour tout élément  $f$  de  $\mathbf{F}$ .

- (a) Montrer que les restrictions de  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_{\infty}$  à  $\mathbf{F}$  sont équivalentes.
  - (b) Montrer que  $\mathbf{F}$  est de dimension finie inférieure ou égale à  $C^2$ .
16.  $\star\star$  — LEMME DE MORSE. —

Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^3$ . On suppose que  $f(0) = f'(0) = 0$  et  $f''(0) > 0$ .



(a) Montrer qu'il existe une application  $g$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = x^2 g(x)$$

(b) Montrer qu'il existe des intervalles ouverts  $I$  et  $J$  contenant 0, un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $\phi$  de  $I$  sur  $J$  tels que pour tout  $x \in I$ ,

$$f(x) = \frac{1}{2} f''(0) \phi(x)^2$$

(c) On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -f'(x). \end{cases}$$

On admet que pour tout couple  $(x_0, y_0)$  de réel le système admet une et une seule solution sur  $\mathbf{R}$  vérifiant la condition initiale  $x = x_0, y = y_0$ . qui sera notée  $\Phi_{(x_0, y_0)}$

Montrer que pour tout réel  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que si  $\|(x_0, y_0)\| < \delta$  alors pour tout réel  $t \geq 0$ ,

$$\|\Phi_{(x_0, y_0)}(t)\| \leq \varepsilon.$$

17. **\*\*** Soient  $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert, c'est-à-dire un espace dans lequel, toute série absolument convergente converge et  $C$  un convexe fermé de  $E$  (l'espace est muni de la norme associé au produit scalaire).

Soit  $x$  un élément de  $\mathbf{E}$ . Montrer qu'il existe un et un seul élément  $c$  de  $C$  tel que  $\|c - x\| = d(x, C)$ .

En déduire que tout sous-espace vectoriel  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{E}$  fermé admet un supplémentaire orthogonal.

# Programme de colle n°21

Dernière semaine de colles. Merci à tous les colleurs pour leur aide.

## 73 Equations différentielles linéaires

On désigne par  $\mathbf{K}$  le corps des réels ou des complexes, par  $\mathbf{E}$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et par  $I$  un intervalle d'intérieur non vide.

- Équation différentielle linéaire du premier ordre vectorielle à coefficient constant.

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = a \cdot \vec{y} + \vec{b}(t), \quad (12)$$

avec  $a \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ ,  $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{E})$ .

- Définitions des solutions sur un intervalle, de la solution d'un problème de Cauchy, de l'équation homogène associée.
- Expression grâce à une exponentielle, de la solution de l'équation homogène et de la solution d'un problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée sur un intervalle  $J$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ . Application au calcul de l'exponentielle de la somme de deux matrices ou endomorphismes qui commutent.
- Résolution pratique de la forme matricielle de l'équation homogène associée à (12) par réduction de la matrice (aucune technicité n'est exigible en dehors des cas où  $a$  est diagonalisable).

*La résolution de l'équation (12) par abaissement du degré (« variation de la constante ») n'est plus au programme.*

- Équation différentielle linéaire du premier ordre vectorielle à coefficient non constant

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = a(t) \cdot \vec{y} + \vec{b}(t), \quad (13)$$

avec  $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(\mathbf{E}))$ ,  $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{E})$ .

- Définitions des solutions sur un intervalle, de la solution d'un problème de Cauchy, de l'équation homogène associée.
- Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (admis, mais la mise sous forme intégrale du problème de Cauchy est au programme). L'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation homogène associée à (13) est un espace vectoriel de dimension  $n$ , l'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation (13) est un espace affine.

*Plus aucune autre connaissance n'est au programme.*

- Équation différentielle linéaire du deuxième ordre scalaire à coefficients non constants

$$a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + b(t) \frac{dy}{dt} + c(t)y = d(t), \quad (14)$$

avec  $a, b, c$  et  $d$  éléments de  $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ .

- Définitions des solutions sur un intervalle, de la solution d'un problème de Cauchy, de l'équation homogène associée. Système linéaire du premier ordre associé.
- Structure de l'ensemble des solutions de (14) et de l'équation homogène associée sur un intervalle  $J$  sur lequel  $a$  ne s'annule pas, théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.
- Wronskien d'une famille  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de deux solutions de l'équation homogène associée à (14). Equation différentielle vérifiée par le wronskien. Caractérisation de la liberté de  $(\varphi_1, \varphi_2)$ .
- Résolution de l'équation (14), lorsque l'on dispose d'une famille  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de deux solutions sur  $J$  de l'équation homogène associée : méthode de la base mobile.
- Étude sur des exemples, de solutions sur un intervalle sur lequel  $a$  s'annule.
- les Sturmeries ne seront vues que lundi (en TD)

**Les questions de cours ou exercices avec un astérisque \* pour : Gaël Le Guest, Ajjad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon, n Félix Antoine, Raphaël Castella-cousin, Malo Le Grogne.**

**Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques \*\* Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Augustin Ravasse, Cyril Brévignon.**

## 74 Questions de Cours

1. Montrer, en admettant le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, que l'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation homogène associée à (13) est un espace vectoriel de dimension  $n$ , l'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation (13) est un espace affine. Donner une norme simple sur l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (13).
2. ★★ Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour (13), on se limitera à un segment.

## 75 Exercice

1. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  non vide, et  $w$  une application de  $I$  dans  $\mathbf{R}$ , continue, à valeurs strictement positives. On note  $\mathbf{E}$  l'espace vectoriel des applications  $f$  de  $I$  dans  $\mathbf{R}$ , continues telles que  $wf^2$  soit intégrable sur  $I$ . On suppose de plus que  $\mathbf{E}$  contient les applications polynomiales de  $I$  dans  $\mathbf{R}$ . Montrer que l'application suivante est bien définie sur  $\mathbf{E}^2$  et est un produit scalaire.

$$\varphi : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}, (f, g) \mapsto \int_I fgw$$

Montrer qu'il existe une et une seule suite d'éléments unitaires de  $\mathbf{R}[X]$ , orthogonale, étagée, on la note  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

Montre que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $p_n$  admet  $n$  racines distinctes, éléments de  $I$ .

2. Vérifier que  $I = ]-1, 1[$  et  $w : I \rightarrow \mathbf{R}; t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  rentre dans le cadre de la question précédente. Vérifier que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$p_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x),$$

pour tout élément  $x$  de  $[-1, 1]$  (polynômes de Tchebychev).

On note  $U_n$  l'ensemble des applications polynomiales de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbf{R}$  de degré égal à  $n$ , unitaires. Montrer que

$$\inf \{ \|p\|_\infty, p \in U_n \} = \|p_n\|_\infty.$$

3. ★ RÉVISION — Soit  $\delta : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); M \mapsto \det(M)$ . Montrer que  $\delta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Donner sa différentielle, au moyen du produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  :
  - en calculant les dérivées partielles ;
  - en utilisant la densité de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ .
4. Soit l'équation différentielle

$$x'' + q(t)x = 0, \tag{15}$$

où  $q$  est une application de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}$  intégrable. Montrer l'existence de solutions non bornées.

5. ★ Soient  $I$  un intervalle d'intérieur non vide,  $t_0$  un point de  $I$  et, pour  $j = 1, \dots, n$ ,  $\Phi_j$  la solution sur  $I$  de

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, X(t_0) = E_i \tag{MHnc}$$

où  $A$  est une application continue de  $I$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  ; soit enfin  $t_0$  un point de  $I$ .

- (a) ★ Montrer que  $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$  est une base de  $\mathcal{S}_{MHnc}(I)$  si et seulement si  $(\Phi_1(t_0), \Phi_2(t_0), \dots, \Phi_n(t_0))$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ . Soit enfin

$$W : I \rightarrow \mathbf{K}; t \mapsto \det_{\mathcal{B}_c}(\Phi_1(t), \Phi_2(t), \dots, \Phi_n(t)).$$

- (b) Montrer que pour tout  $t \in I$  il existe un élément  $R_{t_0}^t$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  tel que pour tout élément  $X_0$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ ,  $R_{t_0}^t X_0$  soit la valeur en  $t$  de la solutionsur  $I$  de (MHnc) qui en  $t_0$  vaut  $X_0$ . Que vaut son déterminant.
- (c) Soient  $t_1$  et  $t_2$  des éléments de  $J$ . Montrer que  $\Phi_{t_1}^{t_2} \circ \Phi_{t_0}^{t_1} = \Phi_{t_0}^{t_2}$  ; en déduire que  $\Phi_{t_0}^{t_1}$  est inversible.
- (d) ★★ Montrer que  $W$  est dérivable et que pour tout  $t \in J$ ,

$$W'(t) = \mathrm{tr}(A(t)).$$

En déduire une expression intégrale du Wronskien. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

(e) **★★** Notons  $\Phi$  la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = A(t) + B(t), \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall t \in J, \Phi(t) = \int_{t_0}^t R_{t_0}^t R_s^t B(s) ds + R_{t_0}^t Y_0,$$

6. (a) Soit  $\vec{\psi}$  une solution de (13) définie sur  $I = \mathbf{R}$ . On suppose que  $a$  et  $b$  sont impaires. Montrer que  $\vec{\psi}$  est paire.
- (b) On suppose que les coefficients  $a, b, c$  et  $d$  de l'équation (14) sont définis sur  $\mathbf{R}$ ,  $2\pi$ -périodiques et que  $a$  ne s'annule pas. Montrer qu'une solution  $\psi$  sur  $\mathbf{R}$  de (14) est  $2\pi$ -périodique si et seulement si  $\psi(0) = \psi(2\pi)$ , et  $\psi'(0) = \psi'(2\pi)$ .
7. Déterminer des solutions de l'équation différentielle  $(1+x^2)y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0$ , développables au voisinage de 0 en série entière.  
En déduire la forme générale des solutions de l'équation sur  $] -1, 1[$ .
8. Soit  $a$  un réel, et  $b$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  continue bornée.  
Soit l'équation différentielle :  $\frac{d^2y}{dt^2} = ay + b(t)$ . On suppose que  $a$  est positif strictement. Montrer qu'il existe une et une seule solution de cette équation sur  $\mathbf{R}$  qui soit bornée. Que dire si  $a$  est négatif ?

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ,  $B$  de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$  continue et bornée. On considère l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = AX + B(t) \tag{LB}$$

et l'équation homogène associée (H).

9. On suppose  $A$  diagonalisable. Montrer que toute solution sur  $\mathbf{R}_+$  non nulle de (H) tend vers 0 en  $+\infty$ , si et seulement si toutes les valeurs propre de  $A$  ont une partie réelle strictement négative.
10. **★** Même question sans supposer  $A$  diagonalisable.
11. **★** On suppose  $A$  diagonalisable. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :  
i. Pour tout application  $B$  de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$  continue et bornée, l'équation différentielle (LB) admet une et une seule solution sur  $\mathbf{R}_+$  bornée.  
ii. Les valeurs propres de  $A$  ont toutes une partie réelle strictement positive.
12. (Ou bien) **★★** Reprendre la question précédente sans supposer  $A$  diagonalisable.
13. **★★** Soit  $A$  une application continue de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telle que pour tout réel  $t > 0$ ,  $A(t)$  ait tous ses coefficients strictement positifs. On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$\frac{dX}{dt} = -A(t)X. \tag{16}$$

- (a) On note  $\mathbf{1}$  l'élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  ayant tous ses coefficients égaux à 1. Pour tout entier  $k \geq 1$ , on note  $\Phi_k$  la solution sur  $\mathbf{R}_+$  du problème de Cauchy  $\begin{cases} (16), \\ X(k) = \mathbf{1}. \end{cases}$  Montrer que pour tout  $t \in [0, k]$ , les  $n$  composantes de  $\Phi_k(t)$  sont supérieures ou égales à 1.
- (b) En déduire l'existence d'une solution  $\Phi$  de (16) sur  $\mathbf{R}_+$ , non identiquement nulle et dont toutes les composantes sont à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$ .

*Indication* : On peut considérer la suite  $\left( \frac{\Phi_k}{\|\Phi_k(0)\|} \right)_{k \in \mathbf{N}^*}$ , où  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ .

14. **★★** SOUS-GROUPES À UN PARAMÈTRE DE  $GL_n(\mathbf{K})$

Soit  $\Phi$  un élément de  $\mathcal{C}^0(GL_n(\mathbf{K}), \mathbf{R})$ , telle que pour tout  $t$  et tout  $s$  réels,  $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$ . Montrer qu'il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  telle que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \varphi(t) = \exp(tA).$$

## Corrections et indications

### Question 8

Notons pour tout réel  $c$ ,  $e_c$  l'application  $\exp(c \cdot)$ .

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est  $\text{vect}(e_r, e_{-r})$ , avec  $r = \sqrt{a}$ .

Soit  $\phi$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Il existe deux application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , (coordonnées de  $\begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}$  dans la base mobile  $\left( \begin{pmatrix} e_r \\ e'_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{-r} \\ e'_{-r} \end{pmatrix} \right)$ , telles que :

$$\begin{aligned}\phi &= \psi_1 e_r + \psi_2 e_{-r} \\ \phi' &= \psi_1 e'_r + \psi_2 e'_{-r}\end{aligned}$$

En dérivant la première égalité et en retranchant la seconde, vient :

$$\psi'_1 e_r + \psi'_2 e_{-r} = 0.$$

En dérivant la seconde<sup>4</sup> :

$$\phi'' = \psi'_1 e'_r + \psi'_2 e'_{-r} + \dots$$

Donc  $\phi$  est solution de l'équation avec second membre si et seulement si

$$\begin{cases} \psi'_1 e_r + \psi'_2 e_{-r} = 0 \\ \psi'_1 e'_r + \psi'_2 e'_{-r} = b \end{cases},$$

Soit si et seulement si :

$$\psi'_1 = \frac{-be_{-r}}{-2r}, \quad \psi'_2 = \frac{be_r}{-2r}.$$

Remarquons alors que  $e_{-r}b$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ , puisque  $b$  étant bornée,  $|b(t)e^{-rt}| = O(e^{-rt})$  et que de même  $e_r b$  est intégrable au voisinage de  $-\infty$ . Donc  $\phi$  est solution si et seulement si, il existe des réels  $c_1$  et  $c_2$  tels que pour tout réel  $t$  :

$$\psi'_1(t) = -\frac{1}{2r} \int_t^{+\infty} e^{-rs} b(s) ds + c_1; \quad \psi'_2(t) = -\frac{1}{2r} \int_{-\infty}^t e^{rs} b(s) ds + c_2,$$

L'ensemble des solutions de l'équation avec second membre est :  $\{\phi_{c_1, c_2}, (c_1, c_2) \in \mathbf{R}^2\}$ , avec :

$$\phi_{c_1, c_2} : t \mapsto -\frac{1}{2r} \int_t^{+\infty} e^{-rs} b(s) ds e^t + \frac{-1}{2r} \int_{-\infty}^t e^{rs} b(s) ds e^{-t} + c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Montrons que  $\phi_{0,0}$  est bornée, alors comme pour tout élément  $(c_1, c_2)$  de  $\mathbf{R}^2$ , non nul,  $c_1 e_r + c_2 e_{-r}$  a une limite infinie en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ , ce sera l'unique solution bornée.

Comme  $b$  est bornée, en posant  $M = \|b\|_\infty$ ,

$$\left| \int_t^{+\infty} e^{-rs} b(s) ds e^t \right| \leq \int_t^{+\infty} e^{-rs} M ds e^t \leq \frac{M e^{-t}}{r} e^t \leq \frac{M}{r}.$$

De même

$$\left| \int_{-\infty}^t e^{rs} b(s) ds e^{-t} \right| \leq \frac{M}{r}.$$

Finalement  $\phi_{0,0}$  est bornée et est la seule solution bornée.

### 11. et 12.

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  de la norme  $\|\cdot\|$  définie par, pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ,

$$\|M\| = \sup_{\|X\|_\infty \leq 1} \|MX\|_\infty.$$

• HYPOTHÈSE : on suppose i.

En particulier, pour  $B$  nulle (LB) admet une et une seule solution bornées sur  $\mathbf{R}_+$  qui est évidemment l'application nulle. Soient  $\lambda \in \text{sp}(A)$ , et  $U$  un vecteur propre associé. La solution  $t \mapsto \exp(tA)U$  est donc non bornée, mais pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,

$$\exp(tA)U = \exp(\lambda t)U,$$

---

4. Je n'écris pas les termes en  $\psi_i$ .

et donc

$$\|\exp(tA)U\|_\infty = \exp(\operatorname{Re}(\lambda)t)\|U\|_\infty.$$

Comme pour tout réel  $r \leq 0$ , l'application  $t \mapsto e^{rt}$  est bornée sur  $\mathbf{R}_+$ , voilà que  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ .

• HYPOTHÈSE : on suppose ii.

SUPPOSONS  $A$  DIAGONALISABLE (QUESTION (11.)).

*Nous avons choisi de faire une preuve élémentaire qui renonce à user de l'exponentielle de matrice, ce afin de ne pas nous écarter du programme et pour ne pas faire de 11. un sous produit de 12. Nous recommandons donc à tous la lecture du 12.*

Par  $E$  nous désignerons l'ensemble des applications de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $B$  une application  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$  continue et bornée. . Soit  $U = (U_1, \dots, U_n)$  une base de vecteurs propres, notons  $\lambda_i$  la valeur propre associée à  $U_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$  et  $P = (U_1 \mid \dots \mid U_n)$  (matrice de passage de la base canonique à la base  $U$  et  $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Soit  $\Phi$  élément de  $\mathbf{E}$  ; posons  $\Psi = P^{-1}\Phi$ . Alors  $\Phi$  est solutionsur  $\mathbf{R}_+$  de (LB) si et seulement si  $\Psi$  est solutionsur  $\mathbf{R}_+$  de

$$\frac{dY}{dt} = \Delta Y + P^{-1}B(t), \quad (17)$$

ou, si l'on préfère, en notant  $b_i$  la  $i^e$  composante de  $B$  de est solutionsur  $\mathbf{R}_+$  de

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + b_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Comme  $B$  est bornée  $P^{-1}B$  l'est aussi et donc les applications  $b_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$  sont bornées, si bien que

$$\exp(-\lambda_i t)b_i = \underset{t \rightarrow +\infty}{O}(\exp(-\operatorname{Re}(\lambda_i)t)).$$

Donc pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$   $t \mapsto \exp(-\lambda_i t)b_i$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ , par négativité de  $-\operatorname{Re}(\lambda_i)$ .

La méthode de variation de la constante de sup. assure alors que, l'ensemble des solutionsur  $\mathbf{R}_+^*$  de (18) est  $\{\Psi_C, C \in \mathbf{C}^n\}$ , où

$$\Psi_C : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}); t \mapsto \left( c_i \exp(\lambda_i t) - \int_t^{+\infty} \exp((t-s)\lambda_i) b_i(s) ds \right)_{i=1, \dots, n}$$

Soit  $i \in \{1, n\}$ .

D'une part

$$|\exp(\lambda_i t)| = \exp(\operatorname{Re}(\lambda_i)t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty,$$

par positivité de  $-\operatorname{Re}(\lambda_i)$ .

D'autre part

$$\left| \int_t^{+\infty} \exp((t-s)\lambda_i) b_i(s) ds \right| \leq \|b_i\|_\infty \int_t^{+\infty} \exp((t-s)\operatorname{Re}(\lambda_i)) ds \leq \frac{\|b_i\|_\infty}{\operatorname{Re}(\lambda_i)}.$$

Donc  $\Psi_C$  est pour tout élément  $C$  de  $\mathbf{C}^n$  non nul non bornée, puisque au moins une de ses composantes n'est pas bornée et  $\Psi_0$  est bornée, puisque toutes ses composantes le sont.

L'ensemble des solutionsur  $\mathbf{R}_+$  de (LB) est  $\{P\Psi_C, C \in \mathbf{C}^n\}$ , or pour  $C \in \mathbf{C}^n$ ,  $P\Psi_C$  est bornée si et seulement si  $\Psi_C$  l'est, par continuité des applications linéaires  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), M \mapsto PM$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), M \mapsto P^{-1}M$ , donc (LB) admet une et une seule solmutionsur  $\mathbf{R}_+$  bornée c'est  $P\Psi_0$ .

D'où i.

*Cas général*

On a d'après le cours que  $M$  s'écrit :

$$M = P \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{d_1} + N_1, \dots, \lambda_1 I_{d_k} + N_k) P^{-1},$$

avec  $N_1, \dots, N_k$  nilpotentes... etc., etc., etc...

ON NE SUPPOSE PLUS  $A$  DIAGONALISABLE (QUESTION 12).

*Cas particulier* :  $A = \lambda I_n + N$ , avec  $N$  nilpotent, ici  $\lambda$  unique valeur propre de  $A$  est donc de partie réelle  $r$  strictement positive.

**Lemme.** *L'application  $t \mapsto \exp(-tA)B(t)$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ .*

Preuve : Comme  $N$  et  $\lambda I_n$  commutent  $\exp(-tA) = \exp(-t\lambda I_n) \exp(-tN) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-tN)^k}{k!}$ , où  $p$  est l'indice de nilpotence de  $N$ .

Donc pour tout  $t \in \mathbf{R}_+$ ,

$$\|\exp(-tA)\| \leq e^{-rt} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(t\|N\|)^k}{k!} \leq Ce^{-tr'}$$

où  $C$  est une constante et  $r' = \frac{1+r}{2}$ . Donc pour tout  $t \geq 0$

$$\|\exp(-tA)B(t)\|_\infty \leq MCe^{-tr'},$$

Où  $M$  est un majorant de  $\{\|B(t)\|_\infty, t \in \mathbf{R}_+\}$ , réel dont l'existence est assuré par le caractère borné de  $B$ .

Donc chaque composante de  $t \mapsto \exp(-tA)B(t)$  a un module négligeable devant  $\frac{1}{t^2}$ , ce qui assure son l'intégrabilité et — c'est la définition que nous adopterons en tout cas — l'intégrabilité de  $t \mapsto \exp(-tA)B(t)$ , au voisinage de  $+\infty$ .

Le lemme étant acquis, en appliquant la méthode variation de la constante, on trouve :  $S_{LB} = \{\Phi_C, C \in \mathbf{C}^n\}$ , avec

$$\Phi_C : t \mapsto \int_t^{+\infty} -\exp((t-s)A)B(s)ds + \exp(tA)C$$

Or

$$\|\Phi_0\|_\infty \leq \int_t^{+\infty} \|\exp((t-s)A)B(s)\|_\infty ds \leq MC \int_t^{+\infty} e^{-(t-s)r'} ds \leq \frac{MC}{r'}.$$

D'où le caractère borné de  $\Phi_0$ . Par ailleurs, on montre facilement que  $t \mapsto \exp(tA)C$  est non bornée au voisinage de  $+\infty$ . Donc  $\Phi_0$  est la seule solution bornée au voisinage de  $+\infty$ .

*Cas général*

On a d'après le cours que  $M$  s'écrit :

$$M = P \text{diag}(\lambda_1 I_{d_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{d_k} + N_k) P^{-1},$$

avec  $N_1, \dots, N_k$  nilpotentes... etc., etc., etc...