DM facultatif n°4

Groupes d'isométries sur $\mathbb{R}^n$

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note :

- E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ sa base canonique
- $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire **canonique** sur E : si $x = (x_1, .., x_n$ ey $y = (y_1, .., y_n)$ sont deux vecteurs de E, on a $\langle x, y \rangle = {}^tXY = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ où X et Y sont les matrices colonnes des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est donc une base orthonormale pour $\langle ., . \rangle$)
- $\mathcal{L}(E)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des endomorphismes de E
- $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E
- $M_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles de taille n
- $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = I_n$ où I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, ${}^tXAX > 0$.

Si $x_1, x_2, ..x_n$ sont des réels, on note diag $(x_1, x_2, ..., x_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $x_1, x_2, .., x_n$ dans cet ordre.

Si p est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\|.\|_p$ la **norme** p sur E :

si $x = (x_1, ..., x_n) \in E$, $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

On note $\|.\|_\infty$ la **norme infinie** sur E : si $x = (x_1, ..., x_n) \in E$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$

Une norme N sur E est dite euclidienne s'il existe un produit scalaire φ sur E tel que pour tout $x \in E$, $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$

Objectifs

Si N est une norme sur E, on dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une N-**isométrie** si pour tout $x \in E$, $N(u(x)) = N(x)$

On note Isom(N) l'ensemble des N-isométries.

L'objectif du problème est de déterminer le nombre d'éléments de Isom(N) dans le cas des normes euclidiennes puis des normes p.

I. Description des normes euclidiennes

1. **Identité du parallélogramme**
   (a) Montrer que si N est une norme euclidienne alors elle vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire pour tous vecteurs x et y de E, on a $(N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2\left[(N(x))^2 + (N(y))^2\right]$
   En déduire que la norme $\|.\|_\infty$ n'est pas euclidienne.
   (b) Justifier que la norme $\|.\|_2$ est euclidienne puis montrer que pour $p \neq 2$, la norme $\|.\|_p$ n'est pas euclidienne.
2. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Si $x = (x_1, .., x_n)$ et $y = (y_1, .., y_n)$ sont deux vecteurs de E, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes associées. Montrer que si l'on pose $\langle x, y\rangle_S = {}^tXSY$, alors $\langle ., .\rangle_S$ définit un produit scalaire sur E.

3. Soit φ un produit scalaire sur E et S la matrice de coefficients $(\varphi(e_i, e_j))$. Justifier que pour tous vecteurs x et y de E $\varphi(x, y) = {}^tXSY$ et que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
   On a donc montré que $\varphi = \langle ., .\rangle_S$.
   Toute norme euclidienne peut donc s'écrire sous la forme : $N_S : x \mapsto \sqrt{{}^tXSX}$ avec $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ où X désigne la matrice colonne associée à x.

II. Quelques généralités et exemples

Soit N une norme sur E.

4) Montrer que $(\mathrm{Isom}(N), \circ)$ est un sous-groupe de $GL(E)$
5) **Une caractérisation géométrique des N-isométries**

   On note $\Sigma(N) = \{x \in E, N(x) = 1\}$, la sphère unité pour N

   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une N-isométrie si et seulement si $u\,(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$.

   Le groupe des N-isométries est donc l'ensemble des endomorphismes laissant stable la N-sphère unité.
6) Dans cette question uniquement $n = 2$ et donc $E = \mathbb{R}^2$.

   On note s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \mathrm{Vect}\{e_1 - e_2\}$ où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et r la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   Les endomorphismes s et r sont-ils des $\|.\|_1$-isométries ?
7) Dans cette question uniquement $n = 3$ et donc $E = \mathbb{R}^3$.

   Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$, ce qui définit une forme quadratique q.
   (a) On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, déterminer une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que $q(x, y, z) = {}^tXSX$
   (b) Déterminer une matrice $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $S = PD^tP$.
   (c) Justifier alors que l'application $N_q : (x, y, z) \mapsto \sqrt{q(x, y, z)}$ est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$
   (d) Déterminer la nature géométrique de la quadrique $\Sigma(N_q)$, la sphère unité pour la norme N_q et en donner une équation simple dans une nouvelle base
   (e) Justifier que $\Sigma(N_q)$ est une surface de révolution, préciser un vecteur qui dirige son axe.
   (f) Déduire de la question 5, par une considération géométrique, que $\mathrm{Isom}(N_q)$ a une infinité d'éléments.

III. Étude de Isom(N) lorsque N est une norme euclidienne

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $[u]_{\mathcal{B}}$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Si N est une norme, on note $\mathrm{ISOM}(N) = \{[u]_{\mathcal{B}}, u \in \mathrm{Isom}(N)\}$. L'ensemble $\mathrm{ISOM}(N)$ est par construction un groupe isomorphe à $\mathrm{Isom}(N)$, c'est "sa version matricielle".

8) **Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes**
   (a) Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, N_S la norme euclidienne associée et $\langle ., .\rangle_S$ le produit scalaire associé.

   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une N_S -isométrie si et seulement si pour tous vecteurs x et y de E, on a $\langle u(x), u(y)\rangle_S = \langle x, y\rangle_S$

(b) En déduire que u est une N_S -isométrie si et seulement si sa matrice A dans $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tASA = S$

9) Reconnaître alors ISOM($\|.\|_2$). Que peut-on dire du nombre d'éléments de ISOM($\|.\|_2$) ? Justifier votre réponse.

10) **Une application des polynômes interpolateurs**

$\mathbb{R}_r[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r.
On se donne $r+1$ réels $x_0 < x_1 < .. < x_r$.

On considère l'application linéaire u de $\mathbb{R}_r[X]$ vers $\mathbb{R}^{r+1}$ définie par $P \mapsto (P(x_0), P(x_1), .., P(x_r))$

(a) Déterminer le noyau de u. En déduire que pour tous réels $y_0, y_1, .., y_r$, il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_r[X]$ tel que pour tout $i \in \{0, .., r\}$, $L(x_i) = y_i$ (un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur).

(b) Application : soit n un entier naturel non nul et $u_1, .., u_n$ des réels strictement positifs, on pose $U = \text{diag}(u_1, ..., u_n)$ et $V = \text{diag}(\sqrt{u_1}, ..., \sqrt{u_n})$. Montrer qu'il existe un polynôme L, à coefficients réels, tel que $V = L(U)$.

11) Racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

(a) Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S$. On dit que A est une racine carrée de S.

(b) Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une autre racine carrée de S. Montrer qu'il existe un polynôme Q, à coefficients réels, tel que $A = Q(B)$. En déduire que A et B commutent.

(c) Montrer que la somme de deux matrices symétriques définies positives est une matrice inversible.

(d) Déduire des questions précédentes que $A = B$ (on pourra calculer $(A+B)(A-B)$).

Désormais, on note $\sqrt{S}$ l'unique racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ de S.

12) **Étude du groupe d'isométrie pour une norme euclidienne**

Soit N une norme euclidienne. Il existe donc une matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in E$, $N(x) = N_S(x) = \sqrt{{}^tXSX}$ où X est le vecteur colonne associée à x.

(a) Montrer que si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S}$ appartient à ISOM(N_S)

(b) Montrer que l'application ψ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans ISOM(N_S) définie par $M \mapsto \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S}$ est une bijection. Le groupe d'isométrie d'une norme euclidienne est-il fini ?

IV. Étude du cardinal de Isom(p)

Dans cette partie p est un réel strictement supérieur à 1, on appelle **exposant conjugué** de p l'unique réel q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Pour alléger l'écriture, une p-isométrie désigne une isométrie pour la norme $\|.\|_p$ et on note Isom(p) le groupe des p-isométries.
Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u^* désigne l'adjoint de u pour $\langle .,. \rangle$. On rappelle que $u^* \in \mathcal{L}(E)$, est caractérisé par l'égalité suivante : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

13) **Endomorphismes de permutation signée**

$\mathcal{P}_n$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $1, 2, ..., n$.
Soit $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, .., \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n$. On note $u_{\sigma,\varepsilon}$ l'endomorphisme de E qui vérifie pour tout $i \in \{1, 2, .., n\}$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_i) = \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$.

(a) Montrer que $u_{\sigma,\varepsilon}$ est une p-isométrie.

(b) Écrire la matrice de $u_{\sigma,\varepsilon}$ dans la base canonique dans le cas où $n = 4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon = (1, 1, -1, 1)$

14) **Inégalité de Holdër**

(a) Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls, on a $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.

(b) En déduire que pour tous vecteurs x et y de E, on a $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|_p\|y\|_q$. Ce résultat s'appelle **l'inégalité de Holdër** (on pourra d'abord démontrer l'inégalité lorsque $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$).

(c) Que devient l'inégalité si $p = 2$?

Dans toute la suite, u désigne une p-isométrie. On note (a_{ij}) les coefficients de la matrice $A = [u]_{\mathcal{B}}$.

15) Montrer que pour tout $j \in \{1,2,..,n\}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p = 1$. En déduire la valeur de $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p$

16) **Une formule clé de dualité**

Soit $x \in E$. On note $\Sigma_q = \{z \in E, \|z\|_q = 1\}$.

(a) Justifier l'existence du réel $\max\limits_{y\in\Sigma_q} |\langle x,y\rangle|$.

(b) Justifier que $\max\limits_{y\in\Sigma_q} |\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|_p$.

Soit $i \in \{1,2,..,n\}$; si $x_i \neq 0$, on pose $y_i = \varepsilon_i|x_i|^{p-1}\|x\|_p^{1-p}$ où ε_i désigne le signe de x_i et si $x_i = 0$, on pose $y_i = 0$. On définit ainsi un vecteur $y = (y_1,..,y_n)$. Montrer que $|\langle x,y\rangle| = \|x\|_p$ puis montrer l'égalité suivante : $\|x\|_p = \max\limits_{y\in\Sigma_q} |\langle x,y\rangle|$.

17) En déduire que si u est une p-isométrie, u^* est une q-isométrie. Donner alors, en justifiant, la valeur de $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ji}|^q$

18) On suppose de plus que $p \neq 2$

(a) Soient $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_r$ des réels dans $[0,1]$ vérifiant $\sum\limits_{k=1}^{r} \alpha_k^{\,p} = \sum\limits_{k=1}^{r} \alpha_k^{\,q}$. Montrer avec soin que pour tout $k \in \{1,2,..,r\}$, α_k ne prend qu'un nombre fini de valeurs à déterminer.

(b) En déduire que pour tout i et j dans $\{1,2,..,n\}$, $|a_{ij}|$ ne peut prendre que 2 valeurs différentes que l'on précisera (on rappelle que les a_{ij} sont les coefficients de la matrice d'une p-isométrie).

19) **Conclusion**

Montrer alors que lorsque $p \neq 2$, Isom(p) est un groupe fini dont on déterminera le cardinal. On remarquera en particulier que ce cardinal est indépendant de p.

Commentaire : Les p-isométries pour $p \neq 2$ sont seulement en nombre fini, contrairement aux isométries euclidiennes qui forment un groupe infini mais compact (pas très difficile à montrer). Sur $\mathbb{R}^n$, la géométrie euclidienne est donc plus riche que celle des normes p pour $p \neq 2$.

Complément X-ÉNS

Nous donnons maintenant la compilation de plusieurs exercices d'Oral donnés aux ÉNS.

Soit (E,N) un sous-espace vectoriel normé de dimension $n \geq 2$. On note $\mathrm{O}(N)$ le groupe des isométries de (E,N) et S_N la sphère unité.

1. Montrer que $\mathrm{O}(N)$ est compact.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est élément de $\mathrm{O}(N)$ si et seulement si $u(S_N) = S_N$.
3. Donner un exemple d'e.v.n. (E,N) pour lequel $\mathrm{O}(N)$ est infini non dénombrable.
4. Déterminer, pour $= \mathbb{R}^n$, le groupe $\mathrm{O}(N_\infty)$.
5. Le groupe $\mathrm{O}(N)$ peut-il être infini et dénombrable ?
6. Déterminer une norme N sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{O}(N)$ soit de cardinal 2.

Indications

1. Le caractère borné de $\mathrm{O}(N)$ se voit instantannément en recourant à la norme subordonnée à N. Le caractère fermé vient de :
$$\mathrm{O}(N)=\bigcap_{x\in E}\{N(u(x))-N(x)=0\}.$$
2. Supposons que u soit élément de $\mathrm{O}(N)$. Alors par définition de $\mathrm{O}(N)$ on a :
$$u(S_N)\subset S_n.$$
Donc en appliquant cette inclusion à u puis à u^{-1},
$$S_N=u^{-1}(u(S_N)\subset u^{-1}(S_N)\subset S_N.$$

Réciproquement, supposons $u(S_n)=S_n$. Soit alors x un élément non nul de E,
$$N(u(x))=N\left(N(x)u\left(\frac{x}{N(x)}\right)\right)=N(x)N\left(u\left(\frac{x}{N(x)}\right)\right)=N(x)\times 1=N(x).$$
Donc $u\in\mathrm{O}(N)$.
3. Tout espace euclidien muni de la norme euclidienne fera l'affaire (on utilisera la forme réduite des matrices des éléments de $O_n(\mathbb{R})$).
4. Soit u élément de $\mathrm{O}(N_\infty)$, de matrice U dans $(E_1,...,E_n)$ base canonique. Pour tout $j\in\{,...,n\}$,
$$1=N_\infty(E_j)=N_\infty(u(E_j))$$
On dispose donc d'un élément $\sigma(j)$ de $\{1,...,n\}$ tel que $|u_{\sigma(j),j}|=1$, on note s_j le signe de $u_{\sigma(j),j}$ fois 1. Mais $1=N_\infty(s_1E_1+s_2E_2+...+s_nE_n)$ donc nécessairement l'aplication
$$\sigma\ :\ \{1,...,n\}\to\{1,...,n\}\,;\ j\mapsto\sigma(j)$$
est injective donc surjective. Autrement dit U est le produit d'une matrice de de permutation $P\sigma$ et d'une matrice diagonale ayant sur sa diagonale des 1 et des -1 :
$$U=P_\sigma\mathrm{diag}(\sigma_1,...,\sigma_n).$$
La réciproque est évidente. Le cardinal de $\mathrm{O}(N_\infty)$ est donc $n!2^n$
5. Soit N tel que O_N soit infini. Soint n la dimension de E et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour tout $g\in\mathrm{O}_N$ on note $\mathrm{Sp}(g)$ le spectre complexe de la matrice de g dans $\mathcal{B}$. Et l'on pose
$$\Lambda=\bigcup_{g\in\mathrm{O}(N)}\mathrm{Sp}(g).$$
Nous allons établir que $\Lambda=\mathrm{U}$ donc $\mathrm{O}(N)$ ne saurait être dénombrable, sans quoi Λ, réunion dénombrable d'ensembles finis serait lui-même dénombrable donc distinct de U, ensemble dans lequel s'inject sans effort le segment $[0,2\pi]$, réputé indénombrable.

Étape 1 *Les matrices dans $\mathcal{B}$ des éléments g sont diagonalisables et leur spectre est élément de* U.

Posons $O_n:=\{\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(g),g\in\mathrm{O}(N)\}$. Comme l'application $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}$ est un morphisme d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ dans $n\mathbb{R}$ donc aussi continue , O_n est un groupe compact de $n\mathbb{R}$. Il est donc borné en particulier pour la norme de Frobénius, donc borné dans $n\mathbb{C}$. Soit alors G élément de O_n. Du caractère borné de O_n provient pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}(G)$ l'égalité
$$\ker(G-\lambda I_n)=\ker((G-\lambda I_n)^2)\,;$$
pour l'inclusion non triviale, si un élément X de $\ker((G-\lambda I_n)^2)$ n'était pas dans $\ker(G-\lambda I_n)$, alors la famille $(X,G(X))$ se laisserait compléter en une base de $n1\mathbb{C}$, le calcul de la matrice de G^k dans cette base pour tout kß$,n\mathbb{N}$ montrerait que la suit $(G^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de O_n non bornée ! Donc l'espace propre de G associé à λ est égal à l'espace caractéristique. Comme λ est quelconque la matrice G est diagonalisable. le caractère bornée de la famille $(G^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ assure que $\mathrm{Sp}(G)\subset\mathrm{U}$.

Étape 2 *L'ensemble Λ est dense dans* U. Prenons une suite injective d'éléments de O_n. Par compacité de O_n elle admet une suite extraite qui converge vers un élément H de O_n Mais quitte à multiplier les termes de cette suite par H^{-1} on dispose d'une suite injective d'éléments deO_n de limite I_n. Au plus un des termes de la suite est égale à I_n (injectivité), donc on dispose d'une suite $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'élément de $\mathrm{O}_n \setminus \{I_n\}$ de limite I_n. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ le spectre de G_k n'est par réduit à 1, car sinon cette matrice diagonalisable (étape 1) serait égale à I_n. Choisissons pour tout $k \in N$, une valeur propre λ_k de G_k distinctes de 1. Quitte à extraire, comme $(\lambda_k)_{k\in N}$ est à valeur dans le compact U, il est possible de supposer que $(\lambda_k)_{k\in N}$ converge vers un élément λ de U. Mais alors

$$0 = \chi_{G_k}(\lambda_k) k \chi_{In}(\lambda) = (\lambda - 1)^n$$

Donc $\lambda = 1$.

Étape 3. *L'ensemble* Λ *est dense dans* U.

Ce résultat classique découle immédiatement de l'étape 2.

Étape 4. *L'ensemble* λ *est compact*

Prenons en effet une suyite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'élément de Λ. Choisissons pour chaque $k \in \mathbb{N}$ un élément g_k de $\mathrm{O}(N)$ tel que $\mathrm{Sp}(g_k)$ contienne λ_k. La compacité de $\mathrm{O}(N)U$ fournit une extractrice ϕ telle que

$$(g_k, \lambda_k) k (g, \lambda),$$

avec $g \in \mathrm{O}(N)$ et $\in$ U. Mais alors

$$0 = \chi_{g_k}(\lambda_k) k \chi_g(\lambda),$$

donc $\lambda \in \Lambda$. On a bien compact

Conclusion. par les deux dernières étapes $\Lambda =$ U

Le groupe $\mathrm{O}(N)$ est non dénombrable.

6. Fait *Tout convexe B compact de $\mathbb{R}^2$ dont l'intérieur contient $(0,0)$ et qui est symétrique par rapport à ce point est la boule unité d'une et d'une seule norme.*

La norme N associé à B est la jauge de B définie par $N(x) = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R}_+^* | \frac{x}{\alpha} \in B\right\}$ (pour x non nul la borne inférieur est un plu petit élément.

Notre stratégie est donc de produire un boule la « moins symétrique possible »pour qu'elle ne soit stabilisée par aucun autre endomorphisme que $\pm\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Prenons B donnée par la figure.

On peut ici expliciter sans mal la norme N pour laquelle elle est la boule unité.

Pour tout (x, y) élément non nul de $\mathbb{R}$ en désignant par θ sont argument principal,

- si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ou $-\pi < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, alors $N(x,) = N_2(x, y)$;
- si $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{3}$, alors $N(x, y) = N_\infty(x, y) = |y|$
- si $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ ou $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq 0$, alors $N(x, y) = \left|x - \frac{y}{2}\right|$.

Soit u un élément de $\mathrm{O}(N)$. l'image de la sphère unité est la sphère unité

Faits
- L'image d'un segment par u est un segment, de même longueur.
- L'image d'un des arc $A_\pm$ est un connexe par arc et n'est pas incluse dans un segment (considérer u^{-1}) donc est incluse dans A_+ ou A_- connexité par arc
- Comme les segments $T_\pm$ et $S_\pm$ sont dirigés par un vecteur d'argument élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ leur longeur dans (E, N) est leur longueur euclidienne, donc l'image de $T_\pm$ est un segment de la sphère unité qui ne saurait être inclus dans $S_\pm$ (bien trop court), donc $u(T_\pm)$ est incluse dans T_+ ou T_- donc égale à T_+ ou T_-, puisque de même longueur.

Cas 1. $u(T_+) = T_+$. Alors nécessairement $u(T_-) = T_-$ et comme S_+ partage avec T_+ le point M_+ on a $u(S_+) \subset S_+$, donc $u(S_+) \subset S_+$. Comme S_+ a un point commun avec l'arc A_+ donc $u(A_+ \subset A_+$.

n'est pas incluse dans....