

## DM bis n°7

### Sujet type X-ÉNS

Ce sujet est constitué d'exercices indépendants plus ou moins longs portant sur les e.v.n. qui préparent aux problèmes d'écrit et aux exercices d'oraux. Ils utilisent abondamment le procédé d'extraction diagonale.

#### ESPACE COMPLETS

Soit  $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'un e.v.n.  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ . On dit que  $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy si : pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N_0 \geq 0$  tel que pour tout  $p$  et tout  $q$  entiers, si  $p \geq q \geq n_0$  alors

$$\|\vec{x}_p - \vec{x}_q\| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que si une suite  $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$  converge, alors elle est de Cauchy. En général la réciproque est fautive. Les e.v.n. dans lesquels la réciproque est vraie jouent un rôle capital en analyse, on dit qu'ils sont complets ou que ce sont des espaces de Banach.
2. On suppose que  $\mathbf{E}$  est de dimension finie. Montrer que toute suite de Cauchy à valeurs dans  $\mathbf{E}$  converge.

*Indication* : On commencera par montrer que la suite admet une valeur d'adhérence.

3. APPLICATION Soit  $f$  une application de  $]0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  continûment dérivable. On suppose que  $f'$  est bornée. Montrer que  $f$  admet une limite en 0.

Remarque : On peut aussi démontrer ce résultat en utilisant l'intégrale généralisée.

4. Soient des e.v.n.  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$  et  $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ . On suppose  $\mathbf{F}$  complet. On munit  $\mathcal{L}_c(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  de la norme  $\|\cdot\|$  subordonnée à  $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathbf{F}}$ . Montrer que  $\mathcal{L}_c(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  est complet.
5. Montrer que  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), N_{\infty})$  est complet.
6. Montrer que  $(\ell^{\infty}, N_{\infty})$  est complet.

#### OPÉRATEURS COMPACTS

Soient  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$   $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$  des espaces de Banach. Un élément  $T$  de  $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  est dit *opérateur compact* si  $\overline{T(B_1)}$  est compact, où  $B_1$  désigne la boule unité fermée de  $\mathbf{E}$ .

1. Soit  $A$  une partie de  $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ , on suppose dans cette seule question  $\bar{A}$  compacte. Montrer que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe des boules fermées de rayon  $\varepsilon$ , en nombre fini,  $B'_1, B'_2, \dots, B'_p$  telles que  $K \subset \bigcup_{i=1}^p B'_i$ . On dit que  $A$  peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon  $\varepsilon$ .
2. On suppose que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ ,  $A$  peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon  $\varepsilon$ .

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$ .

- (a) Montrer qu'il existe une suite  $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  d'applications  $\varphi_m$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  strictement croissantes telle que pour tout entier  $m \geq 1$ , la suite  $x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_m}(n)$  soit à valeurs dans une boule fermée de rayon  $\frac{1}{m}$ .
- (b) Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une suite extraite  $(x_{\psi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  convergente.

On a donc montré que  $A$  a son adhérence compacte si et seulement si pour tout réel  $\varepsilon > 0$ ,  $A$  peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon  $\varepsilon$ .

3. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{K}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  des opérateurs compacts de  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$  dans  $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}c(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ .
4. Montrer que  $\mathcal{K}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  est un fermé de  $\mathcal{L}c(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ .
5. Montrer que pour tout élément  $T$  de  $\mathcal{K}(\mathbf{E})$  et tout élément  $L$  de  $\mathcal{L}c(\mathbf{E})$ ,  $T \circ L$  et  $L \circ T$  sont compacts, (On dit que  $\mathcal{K}(\mathbf{E})$  est idéal bilatère de  $\mathcal{L}c(\mathbf{E})$ ).
6. Montrer que tout élément  $T$  de  $\mathcal{L}c(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  de rang fini est compact. En déduire que toute limite  $T$  dans  $\mathcal{L}c(\mathbf{E}, \mathbf{F})$  d'une suite d'opérateurs de rang fini  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est compact. La réciproque est fautive (conjecture de Grothendieck démontrée par Enflo 1972). Cependant dans le cas hilbertien nous allons montrer la réciproque.
7. On suppose que  $\mathbf{F}$  est un Hilbert<sup>1</sup>. Soit  $T \in \mathcal{K}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ . On note  $K := T(B_1)$ .
  - (a) Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $K$  est inclus dans une réunion finie de boules ouvertes de rayon  $\varepsilon$ . On note  $F_\varepsilon$  l'espace vectoriel engendré par les centres de ces boules.
  - (b) Conclure.
8. Soit  $T \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$ . Montrer que  $\text{Ker}(I - T)$  est de dimension finie.

### THÉORÈME D'ASCOLI

On désigne par  $K$  une partie compacte d'un espace vectoriel normé  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ . Soit  $\mathcal{A}$  une partie de l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .

**Définition :** On dit que  $\mathcal{A}$  est équicontinu en un point de  $K$ , si pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , il existe  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{A}$ ,

$$f(K \cap B_0(a, \eta)) \subset ]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[.$$

On dit que  $\mathcal{A}$  est équicontinu, si  $\mathcal{A}$  est équicontinue en tout point de  $K$ .

On dit que  $\mathcal{A}$  est uniformément équicontinu si pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , il existe  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{A}$  et tout  $(x, y) \in K^2$ , si  $\|x - y\| \leq \eta$  alors

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On se propose de montrer le résultat suivant :

**Théorème d'Ascoli :** On a l'équivalence des deux propositions suivantes :

1. L'adhérence de  $\mathcal{A}$  est compacte (on dit que  $\mathcal{A}$  est relativement compact).
2. La partie  $\mathcal{A}$  est bornée et équicontinue.

Le théorème d'Ascoli a de très nombreuses applications théoriques. Il permet de démontrer d'autres théorèmes caractérisant les compacts comme le théorème de Montel.

1. On suppose que la partie  $\mathcal{A}$  est équicontinue et bornée.
  - (a) Montrer que l'on dispose d'une suite dense  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $K$ .
  - (b) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$ . Montrer qu'il existe une extractrice  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la suite  $(f_{n_k}(x_p))_{k \in \mathbb{N}}$  converge.
  - (c) Montrer que  $\mathcal{A}$  est uniformément équicontinue.

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . On dispose donc d'un réel  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :

$$\forall (x, y) \in K^2, (d(x, y) \leq \eta) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon).$$

- (d) Montrer qu'il existe de  $y_1, \dots, y_N$  éléments de  $\{x_p, p \in \mathbb{N}\}$  tel que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^N B_0\left(y_i, \frac{\eta}{2}\right).$$

---

1. C'est-à-dire un espace préhilbertien qui est complet pour la norme euclidienne

(e) Montrer qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $(k, k') \in \mathbb{N}^2$  tel que  $k' \geq k \geq N$ , on ait :

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_{k'}}(x)| \leq 3\varepsilon,$$

pour tout élément  $x$  de  $K$ .

(f) En déduire que la suite  $(f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$  converge. On notera  $f(x)$  sa limite.

(g) Montrer que  $f : K \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$  est continue.

(h) Conclure.

2. on suppose que la partie  $\mathcal{A}$  est relativement compacte.

(a) Montrer que  $\mathcal{A}$  est bornée.

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ .

(b) Montrer qu'il existe  $f_1, \dots, f_{N_\varepsilon}$  des éléments de  $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$  tels que :

$$\overline{\mathcal{A}} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B_o(f_i, \varepsilon).$$

(c) Montrer que  $\mathcal{A}$  est équicontinu, (on pourra utiliser la continuité uniforme des fonctions  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ).

(d) conclure.

3. Soient  $M \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $c \in \mathbb{R}_+^*$ , et  $\alpha \in ]0, 1]$  trois réels. Posons

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \forall (x, y) \in [0, 1]^2 |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, |f(0)| \leq c\},$$

Montrer que  $\mathcal{A}$  est un compact de  $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .

### CONVERGENCE FAIBLE DANS L'ESPACE DE HILBERT $\ell_2$

On considère  $\ell^2$  des suites réelles de carré sommable. Comme nous serons amenés à considérer des suites d'éléments de  $\ell_2$ , un élément  $u$  de cet espace vectoriel sera noté

$$u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}}$$

Une suite d'éléments de  $\ell^2$  quant à elle se verra notée  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  si bien que pour tout  $k$  et  $n$  entiers, le terme d'indice  $n$  de la suite  $u_k$  sera :  $u_k(n)$ . Comme d'ordinaire  $\ell^2$  est muni du produit scalaire :

$$\ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}; (u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)v(n). \quad (1)$$

on le note  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et on note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée.

Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $e_k$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_k(n) = \delta_{k,n},$$

ainsi les termes de la suite  $e_k$  sont-ils tous nuls excepté celui d'indice  $k$ .

1. (a) Vérifier que la formule (1) définit bien un produit scalaire.

(b) Montrer que la famille  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , est une famille orthonormée. Est-ce une famille totale orthonormée<sup>2</sup> ?

2. Montrer que la suite  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  n'admet pas de suite extraite convergente. Quel résultat vu en exercice est ainsi illustré ?

---

2. On dit qu'une famille orthonormée d'un espace préhilbertien  $\mathbf{H}$  est totale si l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans  $\mathbf{H}$  (muni de la norme associée au produit scalaire).

### 3. CONVERGENCE FAIBLE

Soit  $(u_k)$  une suite d'éléments de  $\ell^2$  et  $v \in \ell^2$ . On dit que la suite  $(u_k)$  converge faiblement vers  $v$  si, par définition, pour tout élément  $z$  de  $\ell^2$ ,

$$\langle u_k | z \rangle \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \langle v | z \rangle.$$

Quand c'est le cas on note :  $u_k \rightharpoonup v$ . La notation  $u_k \rightarrow v$  sera réservée au cas où la suite  $(u_k)$  converge vers  $v$  dans l'espace vectoriel normé  $(\ell^2, \|\cdot\|)$ .

- Montrer que si la suite  $(u_k)$  converge vers  $v$  dans  $(\ell^2, \|\cdot\|)$  alors elle converge faiblement vers  $v$ .
- Donner un exemple de suite d'éléments de  $\ell^2$  qui converge faiblement, mais ne converge pas dans  $(\ell^2, \|\cdot\|)$ .
- On suppose que  $u_k \rightharpoonup v$  et que  $\|u_k\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \|v\|$ . Montrer que la suite  $(u_k)$  converge vers  $v$  dans l'espace vectoriel normé  $(\ell^2, \|\cdot\|)$ .

### 4. THÉORÈME DE REPRÉSENTATION DE RIESZ

Soit  $L$  une forme linéaire non nulle et continue sur  $\ell^2$ . On note  $H$  le noyau de  $L$ .

- Montrer que  $H$  est fermé.
- Soit  $v \in \ell^2$ . On note  $d = d(v, H)$ . Montrer qu'il existe une suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$d \leq \|h_k - v\| \leq d + e^{-k}.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $(h_k(n))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel noté  $p(n)$ .

On note  $p$  la suite  $(p(n))_{n \in \mathbb{N}}$ .

- Montrer que  $p \in \ell^2$  et que  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $p$  dans  $(\ell^2, \|\cdot\|)$ . Montrer que pour toute suite  $h$  élément de  $H$ ,  $v - p$  est orthogonale à  $h$ . En déduire que :

$$H \oplus H^\perp = \ell^2.$$

- Montrer qu'il existe un et un seule élément  $x$  de  $\ell^2$  tel que :

$$\langle x | \cdot \rangle = L,$$

(théorème de représentation de Riesz).

### 5. THÉORÈME DE BANACH-ALAOGLU POUR DÉBUTANTS

Soit  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de la boule unité  $B$  de  $\ell^2$ . On se propose de montrer que  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  admet une suite extraite qui converge faiblement vers un élément de  $B$ .

- Montrer qu'il existe une partie de  $\ell_2$  dense et dénombrable.

*Indication.* On pourra considérer pour tout entier  $n \geq 0$ , l'ensemble

$$\mathcal{P}_n = \{q_1 e_1 + q_2 e_2 + \dots + q_n e_n, (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n\}$$

(polynômes à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à  $n$ ).

On se donne dans la suite  $\{d_i, i \in \mathbb{N}\}$  une partie dense dénombrable de  $\ell_2$ .

- Montrer qu'il existe une extractrice  $\phi_0$  telle que  $(\langle b_{\phi_0(k)} | d_0 \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$  converge
- Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe des extractrices  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k$  telles que  $(\langle b_{\phi_0(\phi_1(\dots\phi(k)))} | d_i \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$  converge pour  $i = 1, 2, \dots, k$ .
- Montrer qu'il existe une extractrice  $\psi$  telle que la suite pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $(\langle b_{\psi(k)} | d_i \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$  converge.

- (e) Montrer que pour tout  $z \in \ell^2$ ,  $(\langle b_{\psi(k)} | z \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$  converge ; on note  $L(z)$  sa limite.
- (f) Montrer que l'application  $L : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R} ; z \mapsto L(z)$  est une forme linéaire continue.
- (g) En déduire le résultat.

*On dit que la boule unité de  $\ell^2$  est faiblement compacte.*

**Remarque.** Ce résultat est vrai dans tout espace de Hilbert. Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien tel que toute suite de Cauchy pour la norme associée au produit scalaire converge. La preuve est identique à celle donnée dans le cas particulier de  $\ell^2$ , pour peu que l'Hilbert possède une partie dense dénombrable.

### UN DERNIER EXEMPLE D'EXTRACTION DIAGONALE (pour un public téméraire)

1. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions d'une partie  $E$  de  $\mathbb{R}$ , **dénombrable** dans  $\mathbb{R}$ , telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  soit bornée par 1. Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une suite extraite qui converge simplement<sup>3</sup> sur  $E$  vers une application  $f$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications de  $\mathbb{R}$  dans  $[-1, 1]$ , toutes croissantes. Montrer qu'il existe une suite extraite de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge simplement sur  $\mathbb{R}$ , (*Théorème de sélection de Helly*).

---

3. On dit qu'une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{R}^{\mathbb{E}}$  converge simplement vers un élément  $g$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{E}}$ , si pour tout réel  $x$  la suite  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge de limite  $g(x)$ .