Travaux dirigés n° 1

I. Matrices et endomorphismes nilpotents

Soit n un entier strictement positif et M une matrice d'ordre n à coefficients dans un sous-corps $\mathbf{K}$ de $\mathbf{C}$. Nous dirons que M est nilpotente si, par définition, il existe un entier strictement positif, k, tel que : $M^k = 0_n$. Quand M est nilpotente, on appelle ordre de nilpotence de M le plus petit élément de l'ensemble des entiers strictement positif k , tels que $M^k = 0_n$.

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension n, et u un endomorphisme de $\mathbf{E}$. Nous dirons que u est nilpotente si, par définition, il existe un entier strictement positif, k, tel que : $u^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$. Quand u est nilpotente on appelle ordre de nilpotence de u le plus petit élément de l'ensemble des entiers strictement positifs k, tels que $u^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$.

1. Montrer que si M est la matrice de u dans une base de $\mathbf{E}$, alors M est nilpotente d'ordre p si et seulement si u est nipotent d'ordre p.
2. Nous supposons dans cette question que u est de rang 1, montrer que u est diagonalisable ou bien est nilpotent.
3. Pour tout entier naturel i on pose $N_i = \mathrm{Ker}(u^i)$ et $I_i = \mathrm{Im}(u^i)$.
   (a) Montrer que les suites $(N_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont monotones, pour l'inclusion, on précisera leur monotonie.
   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel j tel que $N_j = N_{j+1}$. Montre alors que pour tout entier $i \geq j$, $N_i = N_{i+1}$ et $I_i = I_{i+1}$.
   (c) Soit j un entier naturel non nul. Montrer que $N_j = N_{j+1}$ si et seulement si $N_j \oplus I_j = \mathbf{E}$.
   (d) On suppose u nilpotent d'ordre p. On note j_0 le plus petit entier j tel que $N_j = N_{j+1}$, que vaut j_0 et N_{j_0}.
4. Montrer que si M est triangulaire supérieure stricte alors elle est nilpotente. Donner une matrice nilpotente qui n'est ni triangulaire supérieure stricte ni triangulaire inférieure stricte.
5. Nous supposons que M est nilpotent d'ordre n (n désigne toujours la dimension de $\mathbf{E}$).

   Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Montrer que l'élément de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   est nilpotent d'ordre 2. Déterminer une autre élément de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$, nilpotent d'ordre 2, non semblable au précédent.

La fin du I est réservée à un public averti

Notons pour tout entier $k \geq 1$, J_k l'élément [1] de $\mathcal{M}_k(\mathbf{K})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et convenons que $J_1 = O_1$.

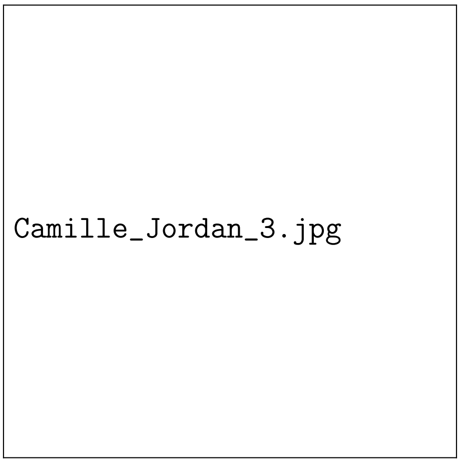

Figure 1 – Camille Jordan 1838–1922.
Professeur à l'École polytechnique puis au Collège de France ; on lui doit en autre la forme réduite des matrices qui porte son nom ainsi que la notion d'arc réctifiable.

Nous supposons que M est nilpotente d'ordre $p \geq 2$. On prend $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et l'on note u l'endomorphisme de $\mathbf{E}$ canoniquement associé à M. Par r nous désignerons le rang de M.

7. Montrer que $p \leq n$.
8. Cas $p = 2$
   On suppose dans cette question que $p = 2$.
   (a) Montrer que $2r \leq n$.
   (b) Montrer que M est semblable à la matrice $\mathrm{dig}(\underbrace{J_2, J_2, ...J_2}_{r \text{ termes}}, 0_{n-2r})$
9. Forme de Jordan des matrices nilpotentes
   On revient au cas général.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$ est nilpotent d'ordre p' à déterminer.
   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel $k \geq 1$, un élément $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ de $(\mathbf{N}^*)^k$ vérifiant :
   $$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_k, \quad \text{et } \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n,$$
   tel que M soit semblable à la matrice
   $$\mathrm{diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, ..., J_{\alpha_k}).$$
   Indication : raisonner par récurence sur l'ordre de nilpotence de u.

1. Le J est en l'honneur de Camille Jordan (1838–1922), et cette notation ne doit pas être confondue avec celle du cours J_r pour l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{diag}(I_r, O_{n-r})$

10. Unicité de la forme de Jordan
    (a) Déterminer pout tout entier $j \geq 2$ et tout entier $\alpha \geq 1$ déterminer de ${J_\alpha}^j$. En déduire la valeur de α_1.
    (b) On suppose qu'il existe un entier naturel $h \geq 1$, un élément $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_h)$ de $(\mathbf{N}^*)^h$ vérifiant :
$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq ... \leq \beta_h, \quad \text{et } \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_h = n,$$
tel que M soit semblable à la matrice
$$\operatorname{diag}(J_{\beta_1}, J_{\beta_2}, ..., J_{\beta_h}).$$
Montrer que $h = k$ puis que $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_h) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$.
Indication : étudier successivement le rang de $M^0, M^1, \ldots, M^{p-1}$
11. Montrer que M, $2M$ et ${}^{\mathrm{t}}M$ sont semblables.

Nous reprendrons cette étude dans un prochain T.D. en vue d'établir la réduction de Jordan d'une matrice quelconque

II. Matrices semblables

1. Les matrices suivantes, éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ sont-elles semblables ?
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. Même question pour
$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Même question pour les éléments de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$:
$$E := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Même question pour les éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$:
$$G := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
G et H sont-elles semblables ?
5. Montrer que E est semblable à sa transposée.

III. Equivalence à J_r

1. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
2. Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on note

$$P_{A,B} \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; \ \lambda \mapsto \det(B + \lambda A).$$

   (a) Montrer que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $P_{A,B}$ est une application polynomiale.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \max\{\deg P_{A,B} | B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\}$.
   (c) Montrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang.

IV. Espace vectoriel de matrices nilpotentes, pour 5/2
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Déterminer les éléments nilpotents de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.
2. Déterminer la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices nilpotentes.
3. Déterminer la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

V. Sous-espace vectoriel de matrices
Par n on désigne un entier naturel non nul. Les éléments de $\mathbf{R}^n$ seront notés en colonne.
On s'intéresse aux sous-espaces vectoriels $\mathbf{F}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $\mathbf{F} \setminus \{O_n\}$ soit inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

1. On suppose dans cette question et seulement dans cette question que $n = 2$. Exhiber un sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ de dimension 2 tels que $\mathbf{F} \setminus \{O_2\}$ soit inclus dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

   Dans toute la suite $\mathbf{F}$ désigne un sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $\mathbf{F} \setminus \{O_n\}$ soit inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

2. (a) En considérant

$$\phi \ : \ \mathbf{F} \to \mathbf{R}^n\,; \ M \mapsto MX_0,$$

   où X_0 est un élément non nul de $\mathbf{R}^n$, montrer que $\dim(\mathbf{F}) \leq n$.
   (b) Retrouver ce résultat en considérant l'ensemble $\mathbf{H}$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont la première colonne est nulle.
3. (**5/2 très provisoirement...**) On suppose que n est impaire. Montrer que $\dim \mathbf{F} \leq 1$.

⋆ ⋆
⋆

VI. Conjugaisons isométriques pour la norme de Frobenius
Par n sera désigné un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que l'application

$$\Phi \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,; \ M \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}M\, M)}$$

   est une norme.
2. Soient i et j des éléments de $\{1, ..., n\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Calculer $E_{i,j}A$ et $AE_{i,j}$.
3. Déterminer les éléments P de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tels que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\Phi(PMP^{-1}) = \Phi(M).$$

Travaux dirigés n° 2

I. PRÉLUDE

Soient A un élément de $\mathbf{R}[X]$ et B un élément de $\mathbf{R}[X]$ de degré $n+1$, scindé à racines simples. Soit l'application φ de $\mathbf{R}[X]_n$ dans lui-même qui à un polynôme P, élément de $\mathbf{R}[X]_n$, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de φ.

II. ÉCHAUFFEMENT

Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice suivante

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

III. MATRICES COMPAGNONS

Nous allons étudier des matrices d'une forme particulière qui jouent, comme nous le verrons, un rôle important en mathématiques. Nous verrons leur utilisation dans une preuve du théorème de Cayley-Hamilton. Elles se rencontrent également dans l'étude des équations différentielles linéaire d'ordre n à coefficients constants.

Par $\mathbf{K}$ on désigne indifféremment le corps des nombres complexes ou celui des nombres réels. Soient n un réel supérieur ou égal à 2 et $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$ des éléments du corps $\mathbf{K}$. On désigne par A l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ suivant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Soit λ une valeur propre de A. Déterminer E_λ l'espace propre associé.
3. On suppose ue $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont d'ordre de multiplicité 1.

IV. Théorème de Kronecker

Les 3/2 admettront le résultat suivant qui sera vu très prochainement. Si le spectre d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\lambda_p\}$, alors celui de M^k est, pour tout entier $k \geq 0$, $\{\lambda_1^k, \lambda_2, \dots, \lambda_p^k\}$. Il le vérifierons pour une matrice diagonalisable cependant.

1. Soient z_1, z_2,...,z_n des nombres complexes, et P le polynôme

$$P = (X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n)$$

On suppose que P est à coefficients entier. Soit un entier $q \geq 2$. Montrer que

$$Q = (X - z_1^q)(X - z_2^q)\dots(X - z_n^q).$$

est à coefficients entiers.d

On se propose de montrer le théorème de Kronecker : *Soit P un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines complexes sont toutes de module inférieur ou égal à 1. on suppose de plus que $P(0) \neq 0$. Montrer que toutes les racines de P sont des racines de l'unité.*

2. Exprimer les coefficients de P au moyen de ses racines.
3. Montrer que l'ensemble de tels polynômes est fini.
4. On note z_1, z_2,...z_n les racines de P. Montrer que

$$(X - z_1^k)(X - z_2^k)...(X - z_n^k)$$

vérifie pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, les propriétés de P.
5. Montrer que toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

V. ENDOMORPHISME DE $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Soit l'application

$$\Phi_A \,:\, \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})\,;\; M \mapsto AM.$$

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme.
2. Donner le rang de Φ_A en fonction de celui de A.
3. En déduire que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.
4. (5/2) Retrouver ce résultat grâce au cours sur les polynômes d'endomorphisme.
5. Donner la trace de Φ_A.
6. Donner χ_{Φ_A}.

Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On se propose de montrer que l'équation d'inconnue X,

$$AX - XB = Y \tag{1}$$

admet une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, quel que soit l'élément Y de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si A et B n'ont pas de valeurs propre commune.

7. On suppose A et B sans valeur propre commune. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\Phi \,:\, X \mapsto AX - XB.$$

   (a) Montrer que $\chi_A(B)$ et $\chi_B(A)$ sont inverisbles.
   (b) Soit Z un élément du noyau de Φ. Montrer que $\chi_B(A)Z = Z\chi_B(B)$. En déduire que Φ est injectif.
   (c) Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$l'équation (1) admet une solution.
8. On suppose que A et B ont une valeur propre λ en commun. Et soit X_1 (resp. X_2) un vecteur propre de A (resp. B) associé à λ.

(a) En considérant $M = X_1 X_2^\top$ montrer que le noyau de Φ est non nul.

(b) Montrer qu'il existe des éléments $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tels que l'équation (1) n'admette pas de solution.

9. Conclure.

Par A on désigne toujours un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\Psi_A \ : \ X \mapsto AXA.$$

10. Montrer que Ψ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
11. En supposant A réelle, montrer que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ induit par Ψ_A est une isométie pour la norme euclidienne canonique, si et seulement si A est orthogonale.

VI. MÉTHODE DES PUISSANCES POUR LE CALCUL DE VALEURS PROPRES

Par n on désigne un entier supérieur ou égal à 2. Les éléments de $\mathbf{R}^n$ sont notés en colonne. et $\mathbf{R}^n$ est muni de la norme euclidienne canonique, notée $\| \cdot \|$.

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ayant n valeurs propres réelles distinctes λ_1, λ_2,...,λ_n non nulles dont les modules sont classés dans l'ordre inverse :

$$0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| < ... < |\lambda_2| < |\lambda_1|$$

Pour $i = 1, \dots, n$ V_i désigne un vecteur propre unitaire associé à λ_i.
On se propose de calculer numériquement λ_1 et V_1
Soit A un élément de $\mathbf{R}^n$ qui n'est pas élément de $\mathrm{vect}(V_2, V_3, ..., V_n)$ [2]

1. Montrer que $(V_1, V_2, ..., V_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$. On note a_i la i^{e} coordonnée de A dans la base $(V_1, V_2, ..., V_n)$, pour $i = 1, 2, ..., n$.
2. On définit les suites $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(r_k)_{k\in\mathbf{N}}$ par :
   $X(0) = A$, $Y_0 = \frac{X_0}{\|X_0\|}$, $r_0 = {}^{\mathrm{t}}\, Y_0 M Y_0$ et pour tout entier $k \geq 1$,

$$\begin{cases} X_k = M(Y_{k-1}), \\ Y_k = \frac{X_k}{\|X_k\|}, \\ r(k) = {}^{\mathrm{t}}\, Y_k M Y_k. \end{cases}$$

   Exprimer Y_k, pour tout entier naturel k au moyen des a_i et de $\|X_1\|X_2\|...\|X_k\|$.
3. Etudier le comportement de Y_k lorsque k tend vers $+\infty$.
4. Montrer que r_k tend vers λ_1 lorsque k tend vers $+\infty$.

2. Il y a très peu de risque que A, choisi au hasard ne vérifie pas cette condition et les erreurs d'arrondie de tout manière sont ici une chance

VII. LEMME DE SCHUR (pour un public averti)

Notons $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $E = \mathbf{C}^n$. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Pour tout $B \in G$, on note $i(B)$l'application :

$$i(B) : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ M \longmapsto BMB^{-1} \end{cases}$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est **stable** par G si quels que soient $M \in G$, $X \in F$, on a $MX \in F$ et on dit que E est **irréductible** pour G si ses seuls sous-espaces stables par G sont E et $\{0_{\mathbf{E}}\}$.

1. Montrer que $i : B \longmapsto i(B)$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}))$, et que i est injectif si et seulement si G ne contient pas d'homothéties autres que l'identité.

   On note $\widetilde{G}$ l'image par i de G et $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{A}$ telles que $i(B)(M) = M$ pour tout B dans G.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}$. Démontrer que $\ker(M)$ et $\mathrm{im}(M)$ sont des sous-espaces stables par G.
3. On suppose que E est irréductible pour G. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}$; démontrer que M est soit nulle, soit inversible. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de dimension 1.
4. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ suivant,

   $$\Phi : X \longmapsto MXN$$

   Démontrer que $\mathrm{Tr}(\Phi) = \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(N)$.
5. Soit $P = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} B$.
   (a) Démontrer que $P^2 = P$. En déduire que P est diagonalisable.
   (b) On note E^G l'ensemble des éléments de $\mathbf{E}$ invariant par tout élément de G :

   $$E^G = \{X \in \mathbf{E} | \forall M \in G, MX = X\}.$$

   Démontrer que $\mathrm{Im}(P) = E^G$ et en déduire que $\dim\left(E^G\right) = \frac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{tr} B$.
6. Démontrer que $\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}\right) = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{tr}\left(B^{-1}\right)\mathrm{tr}(B)$. On pourra considérer d'abord le cas où i est injectif.

⋆ ⋆
⋆

Travaux dirigés n° 4

Par $\mathbf{K}$ on désigne le corps des réels ou celui des complexes.

I. NORMES n_p SUR $\mathbf{K}^n$
Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ des n-uplet de réels positifs.
Soient p et q des réels *conjugués*, c'est-à-dire tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1. Montrer que pour tout a et tout b réels positifs,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ (inégalité de Young).}$$

   Cette inégalité trouvera place dans le cours sur les fonctions convexes.
   Pour $k \in \mathbf{R}_+^*$, on considère

$$\phi_k \ : \ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \begin{cases} \exp(k \ln(t) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

   cette application est continue et pour tout réel $t \geq 0$, la quantité $\phi_k(t)$ sera noté simplement t^k.

2. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \text{ (inégalité de Hölder).}$$

   Que dire du cas $p = q = 2$?

3. En déduire que pour tout réel p strictement supérieurs à 1,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ (inégalité de Minkowski).}$$

4. Montrer qu'avec les notations du cours, n_p est une norme sur $\mathbf{K}^n$.

5. Montrer que pour tout élément $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$,

$$\lim_{p + \infty} n_p(\vec{x}) = n_\infty(\vec{x}).$$

II. NORMES N_p SUR $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{C})$ —
Soient p un réel strictement supérieur à 1, a et b des réels tels que $a < b$;

1. Montrer, qu'avec les notations du cours, N_p est une norme sur $\mathcal{C}^0\left([a, b], \mathbf{K}\right)$, en utilisant la partie I.3, pour prouver l'inégalité triangulaire.
2. Montrer l'inégalité triangulaire en reproduisant pour l'intégrale le raisonnement fait en I.1, I.2 et I.3.

3. Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{K})$,

$$\lim_{p+\infty} N_p(f) = N_\infty(f).$$

4. Soient f et g des éléments de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{K})$ et p et q des réels conjugués. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq N_p(f)N_q(g).$$

5. (**5/2**)) Soient ϕ et f des applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ continues. On supose ϕ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et f à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. On pose pour tout entier $n \geq 0$, $I_n = \int_{[a,b]} \phi f^n$.

   (a) Montrer que le suite $(\sqrt[n]{I_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.

   (b) Montrer que le suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.

II. FONCTIONS HÖLDERIENNES —

Pour tout réel $\alpha > 0$, on notz E_α l'ensemble des fonctions f de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ telles qu'il existe K, réel positif, tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^\alpha.$$

Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$.

1. Montrer que E_α est un espace vectoriel.
2. Soit g un élément de E_α. Montrer que l'ensemble

$$\{k \in \mathbf{R}_+ | \forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^\alpha.\}$$

   admet un plus petit élément noté $k_\alpha(f)$.

3. On supose que $\alpha > 1$. Déterminer $\mathbf{E}_\alpha$.

   Dans la suite $\alpha \in]0,1[$.

4. Vérifier que $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{C}) \subset E_\alpha \subset \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{C})$.
5. Donner une fonction élément de $\mathbf{E}_\alpha$ qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
6. Soit β un réel tel que $0 < \alpha < \beta < 1$. Comparer E_α et E_β.
7. Montrer que l'application :

$$H_\alpha \ : \ \mathbf{E}_\alpha \to \mathbf{R}_+ \,;\ f \mapsto \|f\|_\infty + k_\alpha(f)$$

   est une norme. On la notera $\|\cdot\|_\alpha$

8. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{E}_\alpha$ telle que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall (p,q) \in [\![n_0, +\infty[\![, \|f_p - f_q\|_\alpha \leq \varepsilon. \text{ (suite de Cauchy).}$$

   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément f de $\mathbf{E}_\alpha$ dans $(\mathbf{E}_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$.

Complément pour $\frac{5}{2}$ averti.

III Autour du Théorème de Baire

1. THÉORÈME DE BAIRE —
   Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie ; on désignera par $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{E}$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses de $\mathbf{E}$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} U_n$ est dense.

   Commentaires :

   (a) *Une intersection dénombrable d'ouverts, (qui en général n'est pas ouverte) s'appelle un G_δ. Le théorème dit qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses d'un espace vectoriel de dimension finie est un G_δ dense.*

   (b) *Le théorème de Baire bien que d'énoncé simple admet des conséquences très importantes en analyse. Nous donnerons quelques applications dans la suite*

2. Montre qu'un G_δ dense de $\mathbf{E}$ n'est pas dénombrable.

3. Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fermés de $\mathbf{E}$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n = \mathbf{E}$. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense.

   Indication : On poura montrer que le complémentaire de $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F_n}$ est d'intérieur vide.

4. — CONTINUITÉ D'UNE DÉRIVÉE —

   (a) Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues, qui converge simplement vers une application f, c'est-à-dire que pour tout réel x la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$. Montrons que f est continue sur un G_δ dense.

      i. Soit ε un élément de $\mathbf{R}_+^*$. Pour tout entier nnaturel n, on pose
      $$F_{n,\varepsilon} := \{\ x \in \mathbf{E} | \forall p \in \mathbf{N}, (p \geq n) \Rightarrow (\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon)\}$$
      et
      $$\Omega_\varepsilon := \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}.$$
      Montrer que Ω_ε est un ouvert dense.

      ii. Montrer que tout élément a de Ω_ε, admet un voisinage V tel que pour tout élément x de V, $\|f(x) - f(a)\| \leq 3\varepsilon$.

      iii. Conclure.

   (b) Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable. Montrer que l'ensemble des points de continuité de g contient un G_δ dense.

      Commentaires : Une dérivée est donc « assez » continue. On rapprochera ce résultat du théorème qui dit qu'une dérivée, vérifie le théorème de la valeur intermédiaire, ce qui constitue un premier pas vers la continuité.

5. — CONTINUITÉ ET CONTINUITÉ PARTIELLE — On se propose de montrer le résultat :

   Théorème — *Soit f une application de $[0,1]^2$ dans $\mathbf{R}$. Si en tout point de $[0,1]^2$, f est continue en la première et en la seconde variable, alors il existe un résiduel G de $\mathbf{R}$ tel que f soit continue en tout point de $[0,1]\times G$.*

   Soit un réel ε strictement positif. Pour tout entier naturel n non nul, on note $F_{\varepsilon,n}$ l'ensemble des éléments y de $[0,1]$ tels que, pour tout x et tout x', éléments de $[0,1]^2$ si $|x-x'| \leq \frac{1}{n}$ alors $|f(x,y) - f(x',y)| \leq \varepsilon$:
   $$F_{\varepsilon,n} := \left\{ y \in [0,1] |\ \forall x \in [0,1], \forall x' \in [0,1]^2, |x-x'| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow\ |f(x,y) - f(x',y)| \leq \varepsilon \right\}.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $F_{\varepsilon,n}$ est un fermé de $[0,1]$.

(b) Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} F_{\varepsilon,n} = [0,1]$.

(c) Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \overset{\circ}{F}_{\varepsilon,n}$ est un ouvert inclus dans $[0,1]$ dense dans $[0,1]$.
On le notera Ω_ε.

(d) Soient y_0 un élément de Ω_ε et $x_0 \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un voisinage W de (x_0, y_0) tel que pour tout $(x,y) \in W \cap [0,1]^2$, $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq 2\varepsilon$.

(e) Posons $G := \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \Omega_{\frac{1}{n}}$. Montrer que l'ensemble G est un résiduel inclus dans $[0,1]$.
Soit (x_1, y_1) un point de $[0,1] \times G$. Montrer la continuité de f en (x_1, y_1). Conclure.

6. Théorème de Banach Steinhauss —

Il s'agit sans doutes d'une des applications les plus spectaculaires de Baire, qui conduit à bon nombre de résultats d'analyse tout à fait remarquables.

Soit $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ un e.v.n., $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$ sera muni de $|||\cdot|||$ norme subordonnée à $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\mathbf{F}}$. Soit A une partie de $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$, non vide. Montrer que :

(a) ou bien il existe un réel M tel que pour tout $\vec{\ell} \in A$, $|||\ell||| \leq M$;

(b) ou bien il existe un G_δ dense de $\mathbf{E}$, tel que pour tout élément $\vec{x}$ de ce G_δ,

$$\sup_{\vec{\ell} \in A} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}} = +\infty.$$

En anglais ce théorème porte le nom plus évocateur de *théorème de la « bornaison » uniforme.*

(a) Posons, pour tout élément k de $\mathbf{N}$, $\Omega_k = \{\vec{x} \in \mathbf{E}, \sup_{\vec{\ell} \in A} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}} > k\}$. Montrer que pour tout élément k de $\mathbf{N}$, Ω_k est un ouvert.

(b) Montrer que si, pour tout élément k de $\mathbf{N}$, Ω_k est dense, alors, pour tout élément $\vec{x}$ de $\bigcap_{k \in \mathbf{N}} \Omega_k$, $\sup_{\vec{\ell} \in A} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}} = +\infty$.

(c) Montrer que s'il existe $k_0 \in \mathbf{N}$, tel que Ω_{k_0} ne soit pas dense, alors il existe un réel M. tel que pour tout $\vec{\ell} \in A$, $|||\ell||| \leq M$.

(d) Conclure.

(e) Soit a une suite réelle telle que pour toute suite réelle b, élément de ℓ^2 la série $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $a \in \ell^2$.

Indication. Considérer l'ensemble $\{L_n, n \in \mathbf{N}\}$ des formes linéaires sur ℓ^2 défini par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, L_n \ : \ \ell^2 \to \mathbf{R} \,;\ b \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

Indications pour la question II.8

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. L'hypothése sur $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nous fournit $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall (p,q) \in [\![n_0, +\infty[\![, \|f_p - f_q\|_\alpha \leq \varepsilon. \text{ (suite de Cauchy).} \tag{2}$$

Étape 1. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement.*

• Soit $x \in [0,1]$. Par (2) , pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$|f_p(x)| \leq \max\{|f_{n_0}(x)| + \varepsilon, |f_0(x)|, ..., |f_{n_0-1}(x)|\}$$

la suite $(f_p(x))_{p\in\mathbf{N}}$ est donc bornée.

• Soient ℓ et ℓ' des valeurs d'adhérence de $(f_p(x))_{p\in\mathbf{N}}$. On considère des extractrices ϕ et ψ telles que

$$f_{\phi(p)}(x) \underset{p\to+\infty}{\to} \ell, \text{ et } f_{\psi(p)}(x) \underset{p\to+\infty}{\to} \ell' \ ;$$

quitte à remplacer ϕ par $\phi\circ\psi$, autre extractrice, il est loisible de supposer de surcroît $\phi \geq \psi$. L'inégalité (2) veut que pour tout entier $p \geq n_0$,

$$|f_{\phi(p)}(x) - f_{\psi(p)}(x)| \leq \|f_{\phi(p)} - f_{\psi(p)}\|_\infty \leq \|f_{\phi(p)} - f_{\psi(p)}\|_\alpha \leq \varepsilon,$$

puisque $\phi(p) \geq \psi(p) \geq p \geq n_0$. Laissons tendre p vers $+\infty$, nous obtenons :

$$|\ell - \ell'| \leq \varepsilon.$$

Le caractère arbitraire de ε exige que $\ell = \ell'$.

De ces deux points, et parce que $\mathbf{R}$ est de dimension finie, vient que $(f_p(x))_{p\in\mathbf{N}}$ converge.

D'où la convergence simple de $(f_p)_{p\in\mathbf{N}}$; nous noterons f la limite simple de cette suite.

Étape 2. L'application f est élément de E_α.

Soient x_1 et x_2 des éléments de $[0,1]$. Pour tout entier $p \geq n_0$

$$\begin{aligned}|f_p(x_1) - f_p(x_2)| \leq & |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| + |(f_p - f_{n_0})(x_1) - (f_p - f_{n_0})(x_2)| \leq \\ & (k_\alpha(f_{n_0}) + k_\alpha(f_p - f_{n_0}))|x_1 - x_2|^\alpha \leq \\ & (k_\alpha(f_{n_0}) + \varepsilon)|x_1 - x_2|^\alpha.\end{aligned} \tag{3}$$

Donc en laissant tendre p vers $+\infty$, on a :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (k_\alpha(f_{n_0}) + \varepsilon)|x_1 - x_2|^\alpha.$$

Donc f est élément de $\mathbf{E}_\alpha$.

Étape 2. *La suite $(f_p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers f dans $(E_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$.*

•, pour tout p et tout q entiers tels que $p \geq q \geq n_0$, on a :

$$\forall z \in [0,1], |f_p(z) - f_q(z)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty \leq \|f_p - f_q\|_\alpha \leq \varepsilon,$$

et en laissant p tendre vers $+\infty$, pour tout entier $q \geq n_0$ et tout $z \in [0,1]$

$$|f(z) - f_q(z)| \leq \varepsilon,$$

Donc, la borne supérieure étant le plus petit des majorants, pour tout entier $q \geq n_0$.

$$\|f - f_q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

- Par ailleurs pour tout p et tout q entiers tels que $p \geq q \geq n_0$, on a

$$k_\alpha(f_p - f_q) \leq \|f_p - f_q\|_\alpha \leq \varepsilon,$$

et donc

$$|(f_p - f_q)(u) - (f_p - f_q)(v)| \leq \varepsilon |u - v|^\alpha.$$

pour tout u et v éléments de $[0,1]$. En laissant une nouvelle fois tendre p vers $+\infty$, vient que pour tout entier $q \geq n_0$,

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2, |(f - f_q)(u) - (f - f_q)(v)| \leq \varepsilon |u - v|^\alpha.$$

Donc pour tout entier $q \geq n_0$ on a $k_\alpha(f - f_q) \leq \varepsilon$.

De ces deux points, il vient que pour tout entier $q \geq n_0$,

$$\|f - f_q\|_\alpha \leq 2\varepsilon.$$

Donc la suite $(f_q)_{q \in \mathbf{N}}$ converge vers f dans l'e.v.n. $(E_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$.

Travaux dirigés n° 5

Exemples de suites des itérés d'une fonction croissante, rapidité convergence .

I. THÉORÈMES D'ERNESTO CESÀRO

Soit $(\vec{x})_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, admettant une limite $\vec{\ell}$. Soit alors la suite $(\vec{y}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par,

$$\vec{y}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\vec{x}_k,$$

pour tout entier naturel n.

Cette quantité s'interprète comme la moyenne des $n+1$ premiers termes de la suite initiale, du moins lorsque cette dernière est à valeurs dans $\mathbf{R}$, dans le cas général $\vec{y}_n$ en est plus exactement parlant le barycentre, $\mathbf{E}$ étant muni de sa structure canonique d'espace affine. Le théorème de Cesàro affirme que la suite $(\vec{y}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\vec{\ell}$; on a coutume de dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge ≪ en moyenne ≫ ou ≪ au sens de Cesàro ≫ vers $\vec{\ell}$. Ce résultat est conforme à notre intuition. En effet, la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prend des valeurs qui tendent à se confondre avec $\vec{\ell}$, lorsque n croît, face aux nombre toujours plus grand de termes entrant dans le calcul de $\vec{y}$, les premiers termes y jouent un rôle de plus en plus négligeable, conférant ainsi à la moyenne une valeur proche de $\vec{\ell}$.

La preuve se calque sur cette démarche heuristique.

1. Prouver ce résultat. Que dire de la réciproque ?
2. Généralisation. Sous les hypothèses du 1. on considère une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels *strictement positifs*, telle que la série $\sum\alpha_n$ diverge, c'est-à-dire telle que :

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Soit alors la suite $(\vec{z}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par,

$$\vec{z}_n = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\cdot\vec{x}_k,$$

pour tout entier naturel n (moyenne pondérée de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$).
Déterminer la limite de cette dernière suite.

Le théorèle de Cesàro est rentré au programme dans le cas de suites réelles.

II. PREMIER EXEMPLE

Soient a un élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$, K un élément de $]0, 1]$.

1. Montrer que la relation de récurrence suivante définie bien une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$u_0 := a,\ u_{n+1} := K\sin u_n,\ \text{pour tout } n\geq 0 \tag{4}$$

2. Montrer que cette suite converge vers 0.

   On se propose maintenant d'étudier la rapidité de convergence de cette suite.

3. Représenter sur un graphique les premiers termes de la suite pour $K = 0.25$, $K = 0.5$ et $K = 1$. Que constater ?

4. Montrer que la quantitée $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est définie pour tout entier naturel n et que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\to} K.$$

5. Cas de convergence rapide

   On supose dans cette question que $\underline{K < 1}$.

   Pour n grand, d'après la question précédente, la suite se comporte donc à peu près comme une suite géométrique de raison K, d'où pour préciser son comportement l'idée d'étudier la limite de $\sqrt[n]{u_n}$.

   (a) On note pour tout entier naturel n, $w_n := \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite que l'on déterminera.

   (b) En étudiant la suite suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par : $z_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} w_k$, pour tout entier naturel n, déterminer la limite de la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

   (c) **Réservé aux 5/2**. Donner la forme d'un équivalent du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

6. Cas de convergence lente

   On supose dans cette question que $\underline{K = 1}$.

   (a) Déterminer un réel β tel que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $w_n := u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$, pour tout entier naturel n, admette une limite finie non nulle [3].

   (b) En étudiant la suite suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par : $z_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} w_k$, pour tout entier naturel n, donner un équivalent de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme cn^p où c et p sont des réels.

   (c) **Réservé aux 5/2**. Donner un équivalent simple de $u_n - cn^p$ lorsque n tend vers $+\infty$, (pour les valeurs de c et de p précédemment trouvées).

III. DEUXIEME EXEMPLE.

Soient a un réel strictement positif.

1. Montrer que la relation de récurrence suivante définie bien une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$u_0 := a,\ u_{n+1} := u_n + \frac{1}{u_n},\ \text{pour tout } n \geq 0 \tag{5}$$

2. Déterminer la convergence de cette suite.

3. Donner un équivalent du terme général de cette suite.

IV. DERNIER EXEMPLE

Soit a un élément de $]0, 1[$.

3. L'introduction d'une telle suite, traditionnelle dans les problèmes, semble très artificielle et relever d'une intuision fertile, nous verons dans un prochain chapitre, la source, bien naturelle, d'une telle idée ; pour le moment retenons la recette !

1. Montrer que la formule de récurrence
$$\begin{cases} u_0 := a \\ u_{n+1} := {}^1\!/_2 \left(1 - \sqrt{1 - u_n}\right), \text{ pour tout entier } n \geq 0, \end{cases} \tag{6}$$
   définie bien une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
2. Déterminer la limite de cette suite.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ a une limite ℓ, indépendante de a, à déterminer.
4. **Réservé aux 5/2**. Donner la forme d'un équivalent du terme général de la suite la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

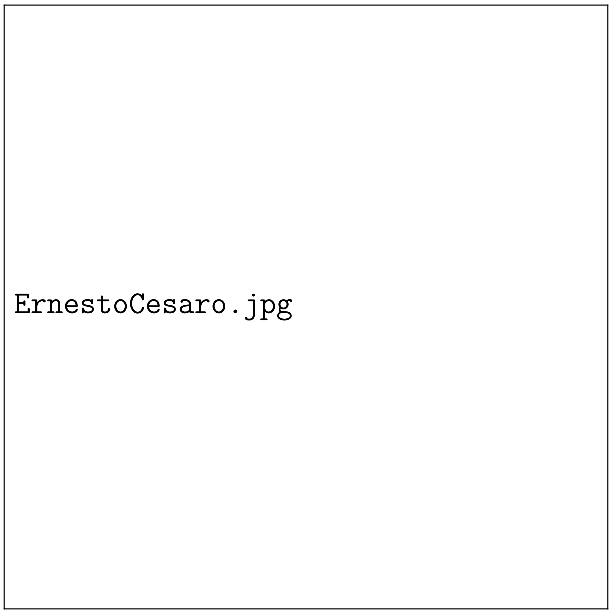

FIGURE 2 – Ernesto Cesàro 1859-1906

Complément pour $\frac{5}{2}$

V. THÉORÈME DE TAUBER

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence égal à 1. On note S sa somme :

$$S :]-1,1] \to \mathbf{R};\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose de plus qu'il existe un réel L tel que

$$S(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\to} L.$$

On s'intéresse à la convergence de la série $\sum a_n$.

1. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\sum a_n$ diverge.
2. On suppose jusqu'à la fin que $a_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to +\infty)$.
   (a) Prouver que pour tout élément x de $]-1,1[$, et tout entier N supérieur ou égal à 1,
   $$\left|S(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leq N(1-x)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}|na_n| + \frac{1}{N(1-x)}\sup_{n>N}|na_n|.$$
   (b) Conclure !

Le résultat demeure en supposant simplement que $a_n = \mathrm{O}(n)$ $(n \to +\infty)$, mais c'est bien plus difficile.

VI. CESÀRERIES

1. (**X.**) On dit qu'une partie A de $\mathbf{N}$ est de densité nulle si
   $$\frac{\mathrm{card}(A \cap \{0,1,\ldots,n\})}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$
   Soit $(a_n)_{n\in N}$ une suite de réels positifs, majorée. On note pour tout entier $n \geq 1$,
   $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k.$$
   On se propose de montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
   i. $S_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$;
   ii. Il existe une partie A de $\mathbf{N}$ de densité nulle telle que $a_n \underset{\substack{n\to+\infty\\ n\notin A}}{\longrightarrow} 0$
   (a) On suppose **ii.** ; Montrer **i.**
   (b) On suppose **i.** Pour tout $n \in N$ on note $\alpha_n := \sup\{S_p, p \geq n\}$. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in N^*}$ tend vers 0. On considère $A := \{p \in \mathbf{N}^* | a_p \geq \sqrt{\alpha_p}\}$. Montrer que A est de densité nulle, en déduire que **ii.** est vraie.
2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue. Pour tout réel a, on définit la suite $(v_n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ par : $v_0(a) = a$; pour tout $n \in \mathbf{N}, v_{n+1}(a) = f(v_n(a))$. Enfin pour tout entier naturel n on pose : $u_n(a) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k(a)$.
   (a) On suppose qu'il existe un réel a tel que la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée. Montrer que f admet un point fixe.
   (b) Trouver un exemple de fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue, ayant un unique point fixe x_f et telle que pour tout réel a distinct de x_f, $(u_n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite distincte de x_f.

Travaux dirigés n° 6

Interpolation

I. Polynômes d'interpolation de Lagrange

1. Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a, b]$ $(a < b)$ à valeurs réelles, soient enfin $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n+1$ points deux à deux distincts de $[a, b]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, que nous noterons P, qui coïncide avec f en chacun des points x_i :

$$P(x_i) = f(x_i), \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pour $i = 0, 1, 2.., n.$, on pose :

$$L_i := \frac{\prod\limits_{j=0,..,n;\ j\neq i} (X - x_j)}{\prod\limits_{j=0,..,n;\ j\neq i} (x_i - x_j)}$$

Exprimera P au moyen des polynômes $L_0, L_1, \ldots L_n$.

P s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

2. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ Soit x un élément de $[a, b]$ et g l'application :

$$[a, b] \to \mathbb{R};\ t \mapsto (f - P)(t) - A.\frac{\prod\limits_{i=0}^{n} (t - x_i)}{(n+1)!},$$

où A est un paramètre réel.

   (a) Montrer que si x n'est pas élément de l'ensemble $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, il existe une valeur de A pour laquelle $g(x) = 0$. Montrer que pour ce choix de A, il existe un élément y de $[a, b]$ tel que $g^{(n+1)}(y) = 0$.

   (b) En déduire qu'il existe un élément y de $[a, b]$ tel que :

$$(f - P)(x) = f^{(n+1)}(y)\ \frac{\prod\limits_{i=0}^{n} (x - x_i)}{(n+1)!},$$

   (que x soit ou non élément de $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$).

3. MÉTHODE DES TRAPÈZES — Dans cette question f est seulement supposée de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout naturel non nul n, en notant $a_i := a + i\frac{b-a}{n}$, pour $i = 0, 1, 2, ..., n$, on considère l'application T_n de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$, affine par morceaux, continue, qui prend en a_i la valeur $f(a_i)$, pour $i = 0, 1, 2, ..., n$ et qui est affine sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, pour $i = 0, 1, 2, ..., n-1$; on note enfin I_n l'intégrale de T_n sur $[a, b]$:

$$I_n := \int_a^b T_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

   (a) Donner l'expression de I_n, pour tout entier naturel non nul n.

(b) En utilisant la question 2., donner une majoration de $|I_n - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t|$, pour tout entier naturel non nul n, en fonction de n et de $\|f''\|_\infty$.

4. Méthode de Simson — Dans cette question f est supposée de classe $\mathcal{C}^3$. Pour tout entier naturel non nul n, en notant : et $a_i := a + i\frac{b-a}{2n}$, pour $i = 0, 1, 2, ..., 2n$, on définit l'application S_n de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$, par

(a) Pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, T_n coïncide sur $[a_{2k}, a_{2k+2}[$ avec le polynôme P_k d'interpolation de f en $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$, $(\mathrm{d}°(P) \leq 2)$;

(b) $S_n(a_{2n}) = f(a_{2n})$;

on note enfin J_n l'intégrale de S_n sur $[a, b]$.

(a) Donner l'expression de J_n, pour tout entier naturel non nul n.

(b) Donner une majoration de $|J_n - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t|$, pour tout entier naturel non nul n.

II. Polynômes d'interpolation d'Hermite

Nous avons vu qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n, qui coïncide en $n+1$ points avec une application donnée. Nous allons généraliser en faisant coïncider en certains points non seulement les valeurs du polynôme et de l'application, mais aussi celles de leurs dérivées successives (interpolation d'Hermite).

Soit k un entier naturel. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_k$, $k+1$ points distincts d'un segment $[a, b]$, , et $k+1$ entiers naturels n_0, n_1,...,n_k. Nous noterons n la quantité

$$\sum_{i=0}^{k} (n_i + 1) \ - 1.$$

Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$, admettant pour $i = 0, 1, 2, ...k$, une dérivée d'ordre n_i au point x_i.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q à coefficients réels tel que pour tout élément i de $\{0, 1, \ldots, k\}$ et tout élément ℓ de $\{0, 1, \ldots, n_i\}$,

$$Q^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i).$$

On prend dans cette question, $k = 1$ et $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $n_1 = n_2 = 1$, donc n=3. Déterminer dans ce cas particulier le polynôme Q.

2. Revenons au cas général, et supposons de surcroît que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit x élément de $[a, b]$, montrer qu'il existe un élément y du plus petit intervalle contenant $x_0, x_1, ..., x_k$ et x, tel que :

$$f(x) - Q(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)^{n_i+1} f^{(n+1)}(y).$$

3. On suppose maintenant que $k = 0$. Déterminer alors Q. Quel résultat connu devient alors le résultat de la question 4. ?

III. Construction des polynômes d'interpolation de Lagrange

On se replace dans le cadre de la première partie, dont on reprend les notations. On cherche à construire numériquement et de sorte assez « économique »le polynôme P qui interpole f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

On note p_k, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, le polynôme qui interpole f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_k$, ainsi $P = p_n$; on désigne par $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ le coefficient de degré k de p_k.

1. (a) Montrer pour $k = 1, \ldots, n$, que

$$p_k - p_{k-1} = f[x_0, x_1, \ldots, x_k](X - x_0)(X - x_1) \ldots (X - x_{k-1}).$$

   (b) Déduire du (a) que :

$$p_n = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](X - x_0)(X - x_1) \ldots (X - x_{k-1}).$$

2. On se propose de donner une méthode algorhitmique de calcul des $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

   (a) Montrer :

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

   (b) Déterminer pour $i = 0, 1, \ldots, k$, $f[x_i]$.

   (c) Donner un algorithme de calcul de p_n, utilisant les résultats (a) et (b), qui fournit

$$f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, x_1, \ldots, x_k], \ldots, f[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

IV. Intégration approchée d'une fonction convexe
Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe.
Soit un entier $n \geq 2$. Montrer que :

$$0 \leq \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{8}(f'(n) - f'(0)).$$

V. Régularité des fonctions convexes (réservé à un public averti)
Soit f une application d'un intervalle I d'intérieur non vide à valeurs réelles, convexe.

1. Montrer que f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point intérieur de I. Comparer la dérivée à droite et celle à gauche en un point intérieur à I.
2. Montrer que f est continue en tout point intérieur à I. Donner un exemple d'application convexes non continue.
3. L'intervalle I est supposé dans cette question ouvert. Montrer que si f est convexe alors elle est continue et admet une dérivée à droite sur I croissante.
4. On suppose que f est continue et admet une dérivée à droite sur I croissante. On se propose de montrer que f est convexe.
   (a) Soit g une application d'un intervalle I non réduit à un point, dérivable à droite et continue. On suppose que g'_d est positif montrer que g croît.
   (b) Soient x_0 un point de l'intérieur de I et T l'application « affine tangente à droite en x_0 » :
   $$T \ : \ I \to \mathbf{R}\,; \ y \mapsto f(y) - f(x_0) - (y - x_0)f'_d(x_0).$$
   Montrer que T est dérivable à droite et continue.
   (c) Montrer, en étudiant le signe de T, que :
   $$\forall y \in I \cap]x_0, +\infty[, \, f'_d(x_0) \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$
   Montrer que :
   $$\forall y \in I \cap]-\infty, x_0[, \, f'_d(x_0) \geq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$
   (d) soient x, y, z trois points de I tels que $x < y < z$, montrer que :
   $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$
   Conclure.
5. Montrer qu'une fonction localement convexe est convexe.
6. Soient a un point intérieur à I et m un réel. Montrer que la droite D_m de $\mathbf{R}^2$ d'équation :
   $$D_m \ : \ y = f(a) + m(x - a)$$
   est au dessous du graphe de f si et seulement si $f'_g(a) \leq m \leq f'_d(a)$.

Correction de V. 4.

On admet le lemme suivant :

Lemme Soit g une application d'un intervalle I non réduit à un point, dérivable à droite et continue. Si g'_d est positif alors g croît.

Soit x_0 un point de l'intérieur de Iet T l'application « affine tangente à droite en x_0 ».

$$T \ : \ I \to \mathbf{R}\,;\ y \mapsto f(y) - f(x_0) - (y - x_0)f'_d(x_0).$$

L'application hérite de la dérivabilité à droite de f et de sa continuité et $T'_d = f'_d - f'_d(x_0)$. Donc par le lemme et la croissance de f'_d, on a que T croît sur $I \cap]x_0, +\infty[$. Comme T est nulle en x_0, T est positif sur $I \cap]x_0, +\infty[$ et donc :

$$\forall y \in I \cap]x_0, +\infty[, f'_d(x_0) \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

De même

$$\forall y \in I \cap] - \infty, x_0[, f'_d(x_0) \geq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

Donc si x, y, z sont trois points de I tels que $x < y < z$, on a alors :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

La convexité en résulte. Redonons la preuve semblable à celle du cours qui dit que si la fonction pente croît, alors la fonction est convexe. Soit y et z des points de I tels que $x < z$. Soit $t \in]0, 1[$ On pose

$$y_t = tx + (1 - t)z.$$

Par le cours de 4[e] sur les barycentres du siècle passé : $t = \frac{z - y_t}{z - x}$ et $(1 - t) = \frac{y_t - x}{z - x}$. Par ailleurs, la propriété des pentes que l'on vient de prouver donne :

$$\frac{f(y_t) - f(x)}{y_t - x} \leq \frac{f(z) - f(y_t)}{z - y_t}.$$

ce qui s'écrit :

$$\left(\frac{z - x}{(y_t - x)(z - y_t)}\right) f(y_t) \leq \frac{f(x)}{y_t - x} + \frac{f(z)}{z - y_t}$$

Donc, par positivité de $(y_t - x)(z - y_t)$ et $z - x$, on a :

$$f(tx + (1 - t)z) = f(y_t) \leq \frac{z - y_t}{z - x} f(x) + (1 - t) + \frac{y_t - x}{z - x} f(z) = tf(x) + (1 - t)f(z).$$

Voilà prouvée la convexité de f.

Preuve du lemme Soient a et b des points de I tels que $a < b$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $E_\varepsilon := \{t \in [a, b] | g(t) \geq g(a) - \varepsilon(t - a)\}$ [4]

Comme $a \in E_\varepsilon$ et que b majore cet ensemble, E_ε admet une borne supérieure inférieure ou égale à b, que nous baptiserons c. La continuité de g veut que E_ε soit fermé et donc que $c \in E_\varepsilon$.

En fait $c = b$. supposons le contraire Comme $g'_d(c) \geq 0$ Il existe un $h > 0$ tel que pour tout $t \in]c, c + h] \cap I$,

$$\frac{g(t) - g(c)}{t - c} \geq -\varepsilon,$$

4. L'objectif est de montrer que $b \in E_\varepsilon$, la définition de la dérivée à droite comme limite d'un taux d'accroissement montre que E_ε contient un voisinage à droite de a.

quitte à diminuer h supposons $c+h \leq b$. On a alors,

$$g(c) - g(a) \geq -\varepsilon(c-a),$$

$$g(c+h) - g(c) \geq -\varepsilon(h),$$

par sommes de ces inégalités :

$$g(c+h) - g(a) \geq \varepsilon(c+h-a)$$

ce qui fait de $c+h$ un point de E_ε, contredisant la définition de c.

Donc $c = b$ et on a $g(b) \geq g(a) - \varepsilon(b-a)$. Comme ε est quelconque :

$$g(b) \geq g(a).$$

Voilà prouvée la croissance de g.

Travaux dirigés n° 7

Compacité

On utilisera le résultat suivant que nous allons voir en cours :
Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute partie fermée bornée est compacte.

I UN THEOREME DU POINT FIXE COMPACT

Soit K un compact d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|.\|)$ et $\vec{f}$ une aplication de K dans K vérifiant pour tout $\vec{x}$ et tout $\vec{y}$, éléments distincts de K :

$$\left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\right\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|. \tag{7}$$

1. Montrer que $\vec{f}$ admet un unique point fixe.
   INDICATION : Pour l'existence, étudier l'application $g : K \to \mathbf{R}$, $\vec{x} \mapsto \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{x}\right\|$.
2. Soit $\vec{c}$ un point quelconque de K. On définit la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par
   $$\begin{cases} \vec{x}_0 = c \\ \vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n) \ \ n \geq 0 \end{cases}.$$
   Pour tout entier naturel n on pose $d_n = \left\|\vec{f}(\vec{x}_n) - \vec{x}_n\right\|$. Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, nous noterons ℓ sa limite.
3. Montrer qu'il existe une sous suite $\left(\vec{x}_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ de la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers un élément $\vec{a}$ de K, et montrer que $\left\|\vec{f}(\vec{a}) - \vec{a}\right\| = \vec{\ell}$
4. En considérant la suite $\left(d_{\varphi(n)+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que $\vec{\ell} = 0$.
5. Montrer que la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l'unique point fixe de $\vec{f}$.
6. Déduire de ce qui précède une méthode numérique pour résoudre l'équation :
   $$\tan x - x = k.$$
7. Donner un exemple d'application $\vec{f}$ vérifiant (7), mais pour laquelle il n'existe pas de réel k , élément de $]0,1[$, tel que $\vec{f}$ soit k-contractante.
8. Montrer que si K est seulement fermé, (mais pas compact) alors $\vec{f}$ n'a pas nécessairement de point fixe.
9. Nous supposons maintenant que K est un compact étoilé de $\mathbf{R}^p$ où p est un entier strictement positif, et que $\vec{g}$ est une aplication de K dans K vérifiant pour tout $\vec{x}$ et tout $\vec{y}$, éléments de K :
   $$\|g(x) - g(y)\| \leq \|x - y\|. \tag{8}$$
   Montrer que $\vec{g}$ admet au moins un point fixe. L'application $\vec{g}$ peut-elle admettre plusieurs points fixes ?
10. Prenons une feuille de papier non perforée, posons la sur une table et dessinons sur la table le rectangle correspondant au pourtour de la feuille. Puis froissons sauvagement la feuille et reposons la dans le rectangle de sorte que chacun des points de la feuille ainsi froissée se projette orthogonalement dans le rectange. Montrer qu'un des points de la feuille au moins se projette orthogonalement sur sa position initiale. Le résultat demeure-t-il pour une feuille perforée ?

II THÉORÈME DU POINT FIXE DE PICARD

Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ de dimension finie. Soient k un élément de $[0,1[$, et $\vec{f}$ une application de F dans F, k-contractante.

On se propose de montrer que $\vec{f}$ admet un et un seul point fixe.

1. Montrer que $\vec{f}$ admet au plus un point fixe.
2. Soit $\vec{a}$ un élément de F. On considère la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des itérés de $\vec{a}$ par f, c'est-à-dire $(\vec{f}^n(\vec{a}))_{n\in\mathbf{N}}$.
   (a) Montrer que pour tout p et tout q entierss tels que $p > q$,
   $$\|\vec{x}_p - \vec{x}_q\| \leq \frac{k^q}{1-k}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\|.$$
   (b) Montrer que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
   (c) Montrer que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément $\vec{\ell}$ de F.
   (d) Conclure.
3. (5/2) On se propose de passer par un autre biais. Montrer que,la série $\sum \vec{x}_{n+1} - \vec{x_n}$ est absolument convergente. Conclure.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $\|\vec{f}^n(\vec{a}) - \vec{\ell}\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|\vec{f}(\vec{a}) - \vec{a}\|$.

III DISTANCE À UN COMPACT

On admet le résultat que nous allons prochainement voir en cours : *Toute partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte.*

1. Le cas général : Soient A une partie non vide, compacte d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|.\|)$ et $\vec{c}$ un élément de $\mathbf{E}$. Montrer qu'il existe au moins un élément $\vec{a}$ de A tel que :
   $$\mathrm{d}\,(\vec{c}, A) = \|\vec{a} - \vec{c}\|.$$
2. Montrer que le résultat demeure si A est seulement un fermé non vide et $\mathbf{E}$ de dimension finie.
3. Application : On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme euclidienne canonique (norme de Frobenius). Montre que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de déterminant 1, est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$), qui est fermé. Est-il compact ? Montrer qu'il existe un élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ de norme minimale. *À suivre...*
4. Montrer que le résultat demeure si l'on remplace A, par un sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$, de dimension finie, ($\mathbf{E}$ étant de dimension quelconque).
5. Un cas particulier : Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b], \mathbf{R})$ qui contient les applications polynomiales, muni d'une norme notée $\|.\|$. Pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des applications polynomiales de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ de degré inférieur ou égal à n.
   a. Montrer que pour toute application f élément de $\mathbf{E}$, il existe au moins un élément p_n de $\mathcal{P}_n$ tel que :
   $$\mathrm{d}\,(f, \mathcal{P}_n) = \|f - p_n\|.$$
   Nous appellerons p_n, « *polynôme de meilleure approximation de f de degré n* ».
   b. Prenons pour $\mathbf{E}$, l'ensemble des applications f de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$, continues par morceaux, qui vérifient :
      i. pour tout élément x de $]-1,1[$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(x^+\right) + f\left(x^-\right)\right)$,

ii. $f(1) = f(1^-)$, $f(-1) = f(-1^+)$.

Vérifier que $\mathbf{E}$ est bien un espace vectoriel. Montrer que l'application

$$N_1 : \mathbf{E} \to \mathbf{R},\ f \mapsto \int_{-1}^{1} |f(t)|\, \mathrm{d}t,$$

est bien une norme sur $\mathbf{E}$.

c. - Soit f l'élément de $\mathbf{E}$, défini par :

$$f(x) = -1,\ \text{pour } x < 1,$$

$$f(x) = +1,\ \text{pour } x > 1.$$

Déterminer tous les polynômes de meilleure approximation de degré 0 de f.

Compléments pour public averti...

IV THÉORÈME DE HEINE

1. Soient K et K' des compacts non vides d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que l'ensemble $\{\|\vec{x}-\vec{y}\|, (\vec{x},\vec{y}) \in K \times K'\}$ admet une borne inférieure que, dans la suite on notera $\mathrm{d}(K, K')$ (distance de K à K').
2. Montrer qu'il existe un élément $\vec{x}_0$ de K et un élément $\vec{y}_0$ de K' tels que : $\mathrm{d}(K, K') = \|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\|$.
3. Soit $\vec{f}$ une application d'un compact D de $\mathbf{E}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathbf{F}, \|\cdot\|)$, continue. Soit ε un réel strictement positif, On note $H_\varepsilon := \{(x,y) \in D^2, \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \geq \varepsilon\}$ et $\Delta := \{(x,x), x \in D\}$. Montrer que H_ε et Δ sont des compacts disjoints.
4. En déduire le théorème de Heine.

V UNE CARACTÉRISATION DES COMPACTS

Soit $(E; \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé tel que toute série à valeur dans $\mathbf{E}$ absolument convergente soit convergente [5].

Nous allons donné une caractérisation « géométrique » des compacts

Adoptons la définition suivante :

Définition. *Une partie A de $\mathbf{E}$ est dite* plate *si pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, il existe un sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$, de dimension finie, tel que $A \subset \mathbf{F}_\varepsilon$, où $\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{F} + \mathrm{B_f}(0_{\mathbf{E}}, \varepsilon)$, ($\varepsilon$-grossissement de F) .*

Nous allons prouver :

Proposition. *Soit une partie A de $\mathbf{E}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) L'ensemble K est un compact.

(ii) L'ensemble K est fermé, borné et plat.

On désigne dans la suite par A une partie de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$.

1. Précompacité.

   (a) On suppose dans cette question la partie A compacte. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des boules fermées de rayon ε, en nombre fini, $B'_1, B'_2, \dots B'_p$ telles que $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} B'_i$. On dit que A peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon ε.

   (b) *application* Montrer que tout compact K de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. possède une partie dense dénombrable.

   (c) On suppose que pour tout réel $\varepsilon > 0$ la partie A peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon ε [6].

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de A.

   Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_m)_{m\in\mathbf{N}^*}$ d'applications φ_m de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ strictement croissantes telle que pour tout entier $m \geq 1$, la suite $(x_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_m(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ soit à valeurs dans une boule fermée de rayon $\frac{1}{2^m}$.

   En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une suite extraite $(x_{\psi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ convergente.

   (d) Montrer que $\bar{A}$ adhérence de A est compacte si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, la partie A peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon ε.

5. De tels espaces vectoriels normés sont dits de Banach ou complet.
6. On traduit cette propriété en disant que A est précompacte.

2. On suppose la partie A compacte. Montrer que A est fermée bornée plate.
3. On suppose A fermée, bornée et plate.

   Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

   (a) Montrer que sans perte de généralité, on peut supposer que $K \subset \mathrm{B_f}(0_{\mathbf{E}}, 1)$

   Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

   (b) Par hypothèse de platitude on dispose de $\mathbf{F}$ sous-espace vectoriel de dimension finie tel que $\mathbf{F}_\varepsilon$ contienne K. On note $\mathrm{B}_{\mathrm{f},\mathbf{F}}$ la boule unité fermée de $\mathbf{F}$.

   Montrer qu'il existe d'un entier $N_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ et de $(y_1, \dots, y_{N_\varepsilon}) \in F^{N_\varepsilon}$ tels que :

$$\mathrm{B}_{\mathrm{f},\mathbf{F}} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} \mathrm{B}_{\mathrm{f},F}(y_i, \varepsilon).$$

   (c) On suppose que ε est inférieur à 1. Déduire de la précédente sous-question, que A est recouvert par N_ε boules fermées de rayon 3ε.

   (d) En déduire que A est compact.

VI COMPACTS ET RECOUVREMENT PAR DES OUVERTS (X, ENS)

Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Nous nous proposons de montrer qu'une partie K de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$est compact, si et seulement si pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, il existe une partie *finie* J de I telle que $A \subset \bigcup_{i\in J} O_i$. On traduit cette dernière propriété en disant que de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

1. On suppose que K est un compact de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$.

   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$; il existe un recouvrement fini de K par des boules ouvertes de rayon ε.

   Indication : Raisonner par l'absurde.

   (b) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $\mathrm{B}_0(x, \varepsilon) \cap K \subset O_i$.

   Indication : Raisonner par l'absurde.

   (c) Montrer que de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.
2. Montrer que si de de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini, alors K est compact[7].
3. Montrer que K est compact si et seulement si pour toute famille de fermés de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, $(F_i)_{i\in I}$ telle que $K \cap \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \emptyset$, il existe une sous-famille *finie* $(F_i)_{i\in J}$ telle que :

$$K \cap \left(\bigcap_{i\in J} F_i\right) = \emptyset.$$

7. C'est cette propriété, qui dans le cas de topologies ne dérivant pas d'une distance, sert à définir un compact.

Travaux dirigés n° 8

Connexité par arcs, convexité

I. CONVEXES

Certaines questions font l'objet du DM 3, et ne sont là que pour mémoire.

Soit C un convexe non vide fermé de $\mathbf{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. le produit scalaire canonique est noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ la norme associée.

On appelle hyperplan d'appui de C en un point a de C tout hyperplan $\mathbf{H}$ de $\mathbf{R}^n$ passant par a tel que C soit inclus dans un des demi-espaces fermés définis par $\mathbf{H}$. Un point a de C est dit extrémal si $C - \{a\}$ est convexe, autrement dit si a n'est pas le milieu de deux points distincts de C.

1. Enveloppe convexe. Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$ non vide.

   L'enveloppe convexe d'une partie, comme les sous-espace vectoriels ou sous-groupes engendrés par une partie, peut se définir de deux manières :
   — par intersection ;
   — au moyen d'opérations sur les éléments de la partie.

   (a) Montrer que l'intersection d'une famille non vide de convexes est convexe. En déduire qu'il existe un plus petit convexe contenant A. On l'appelle enveloppe convexe de A, on notera $\operatorname{conv}(A)$.

   (b) Montrer que $\operatorname{conv}(A)$ est l'ensemble $\mathcal{B}_+(A)$ des barycentres d'un nombre quelconque d'éléments de A affectés de coefficients positifs quelconques.

   Soit p un point de $\operatorname{conv}(A)$ barycentre à coefficients positif de d points $a_1, ..., a_d$, affectés des coefficients respectifs $(\alpha_1, ..., \alpha_d)$. On suppose que $d \geq n+2$.

   (c) Montrer que le noyau de l'application linéaire suivante est non trivial

   $$\Phi \ : \ \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}\,;\ (x_1, ..., x_d) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{d} x_i a_i, \sum_{i=1}^{d} x_i\right)$$

   En considérant un élément $(z_1, ...z_d)$ du noyau de L non nul et les applications

   $$\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \alpha_i + t z_i,$$

   pour $i = 1, 2, ...d$, montrer que p est barycentre à coefficients positifs de $d-1$ points de A.

   (d) Théorème de Carayhéodory —

   Montrer que $\operatorname{conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres de $n+1$ éléments de A affectés de coefficients positifs quelconques.

   (e) On suppose que la partie A est compacte. Montrer que son enveloppe convexe, $\operatorname{conv}(A)$, est aussi compacte.

   (f) L'enveloppe convexe d'un fermé est-elle fermée.

2. Projection sur un convexe

(a) Soit z un élément de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe un et un seul point c de C tel que : $\|z-c\| = \mathrm{d}(c, C)$. Le point c s'appelle projection de z sur C et sera noté $p(z)$. On dispose ainsi d'une application p de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans C.

(b) Soit y un élément de C, montrer que $\langle y - p(z) | z - p(z) \rangle \leq 0$.

Indication : Considérer un point du segment $[p(\vec{a}), \vec{y}]$.

Quelle interprétation géométrique donner de ce résultat ?

(c) Soient a et b des éléments de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $\|p(a) - p(b)\| \leq \|a - b\|$. Que dire de l'application p ?

3. On suppose que z n'apartient pas à C. Montrer que C admet en $p(z)$ un hyperplan d'appui

4. Montrer que $p(\mathbf{R}^n - C) \subset \mathrm{Fr}(C)$

5. Soit f un point de la frontière de C. Montrer que C admet en f un hyperplan d'appui. *Indication* : Considérer une suite d'éléments de $\mathbf{R}^n \setminus C$ qui converge vers f.

6. Théorème de Krein-Milman

On suppose dans cette question que C est *compact*.

(a) Soit $\mathbf{H}$ un hyperplan d'appui de C en un point a. Montrer que a est un point extrémal de C si et seulement si il est un point extrémal de $C \cap \mathbf{H}$ (on justifiera que $C \cap \mathbf{H}$ est un convexe fermé.

(b) Montrer que tout point y de C est barycentre à coefficients positifs de points de la frontière de C.

Indication : On pourra considérer l'intersection de C et d'une droite passant par y.

(c) Montrer que C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (Théorème de Krein-Milman).

7. On ne suppose plus C compact mais au contraire, non borné. Montrer que C contient une demi droite.

8. Soient X un convexe de $\mathbf{R}^n$ non vide, a un point intérieur à X et b un point adhérent à X. Montrer que $[a, b[$ est inclus dans l'intérieur de X.
Indication : Etudier pour un point x de $[a, b[$ l'image d'une boule de centre a par une homothétie de centre x.

9. Égalité des accroissements finis vectorielle

(a) Rappeler l'égalité des accroissements finis pour une application d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Montrer que si l'on remplace dans l'énoncé l'ensemble d'arrivé $\mathbf{R}$ par $\mathbf{R}^2$, alors le résultat est faux.

Donnons un généralisation à $\mathbf{R}^n$ de l'égalité des accroissements finie.

Soit F une application d'une application d'un intervalle ouvert I non vide à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$. Le sous-espace affine engendré par A est le plus petit sous-espace affine de $\mathbf{R}^n$ contenant A, c'est aussi l'ensemble des barycentres de points de A.

Théorème 1. *Supposons F dérivable et soient a et b des élément de I tels que $a < b$. Notons d la dimension de l'espace affine engendré par $F([a, b])$. Alors il existe c_1, c_2,...,c_{d+1} des éléments de $]a, b[$, λ_1, λ_2,...,λ_{d+1} des réels positifs ou nuls de somme 1, tels que*

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i F(c_i).$$

Ce théorème est assez délicat, nous allons en donner une forme faible : nous supposerons F de classe $\mathcal{C}^1$ et nous contenterons pour les c_i de l'apppartenance à $[a, b]$.

(b) Montrer que l'on ne restreint pas la généralité en supposoant que $0_{\mathbf{R}^n}$ est élément de $F([a, b])$ et que dans ce cas le sous-espace affine engendré par $F([a, b])$ est le sous-espace vectoriel engendré par $F([a, b])$.

(c) Montrer que $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ est limite d'une suite de barycentres à coefficients positifs d'éléments de $F'([a, b])$.

(d) Conclure.

II. CONNEXITÉ PAR ARCS

Soient un entier $n \geq 2$ et une application f de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ continue.

1. On suppose qu'il existe un réel a tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit un singleton. Montrer que f atteint en $f^{-1}(\{a\})$ son maximum ou son minimum.
2. On supose qu'il existe un réel b tel que $f^{-1}(\{b\})$ soit compact. Montrer que f atteint son maximum ou son minimum.

III . RECOUVREMENT D'UN COMPACT (pour un public averti)

L'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soit K un compact de $\mathbf{R}^2$.

1. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un ensemble finie P de K tel que K soit recouvert par les boules ouvertes de rayon ε centrées sur les points de P : $K \subset \bigcup_{p \in P} \mathrm{B}_0(p, \varepsilon)$.
2. Montrer que K possède une partie dense dénombrable.
3. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on dit qu'une partie A de K est ε-séparée si la distance entre deux points distincts de A est supérieure ou égale à ε.
   (a) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un entier $M(\varepsilon)$ tel que toute partie ε-séparée soit de cardinal inférieur ou égal à $M(\varepsilon)$ et tel qu'il existe une partie ε-séparée de cardinal $M(\varepsilon)$.
   (b) Dans le cas paticulier où la norme choisie est la norme euclidienne canonique et où K est inclus dans la boule fermée de centre l'origine et de rayon $R > 0$ donner un majorant de $M(\varepsilon)$
   (c) Soit f une application de K dans K qui conserve la distance. Montrer que f est surjective.
4. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Soit F une partie de K, *finie*. On dit que F recouvre K à ε près si :
$$K \subset \bigcup_{a \in F} \mathrm{B_f}(a, \varepsilon).$$
   (a) Montrer qu'il existe un entier $m(\varepsilon)$ tel que toute partie qui recouvre K à ε près soit de cardinal supérieur ou égal à $m(\varepsilon)$ et tel qu'il existe une partie qui recouvrent K à ε près de cardinal $m(\varepsilon)$.
   (b) Notons $\mathcal{P}$, l'ensemble des parties qui recouvrent K à ε près de cardinal $m(\varepsilon)$. Montrer que l'application
$$\mathcal{P} \to \mathbf{R}\,;\ P \mapsto \sum_{(x,y) \in \mathcal{P}^2} \|x - y\|$$
   atteint sa borne inférieure.