# DM n$^{\text{o}}$3

**Théorèmes du point fixe de Brouwer et de Schauder**

Dans tout ce texte $d$ désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Ce problème est pour l'essentiel consacré au théorème de Brouwer dont sera déduit à la fin du sujet, le théorème de Schauder.

**Théorème de Brouwer** —*Soient $\mathcal{C}$ un convexe compact non vide d'un espace euclidien $\mathbf{E}$ de dimension $d$ et $f$ une application continue de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. Alors $f$ admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe un élément $x^*$ de $\mathcal{C}$ tel que $f(x^*) = x^*$.*

**Plan.**

La première partie démontre un résultat technique classique et qui sera utilisé à la fin du problème : le théorème de projection sur un convexe. Toutes les questions de cette parties sont à connaitre pour les concours. La deuxième s'intéresse au théorème de Brouwer et à une généralisation en dimension 1. La troisième partie démontre le théorème Brouwer dans le cas particulier où $\mathcal{C}$ est un triangle de $\mathbf{R}^2$, par une méthode combinatoire. La quatrième partie déduit de la troisième le théorème de Brouwer en dimension 2, lorsque $\mathcal{C}$ est d'intérieur non vide. En admettant le résultat de la quatrième partie en dimension quelconque on montre enfin la forme générale du théorème dans la partie V. La sixième et ultime partie déduit du théorème de Brouwer le théorème de Schauder qui en est une généralisation en dimension infinie et un théorème crucial de l'analyse fonctionnelle.

## Partie I

### Théorème de projection sur un fermé convexe en dimension finie

1. (a) Soient $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $\mathcal{K}$ un compact non vide de $\mathbf{E}$ et $x_0$ un point de $\mathbf{E}$. Montrer qu'il existe un élément $y_0$ de $\mathbf{K}$ tel que : $\|x_0 - y_0\| = \mathrm{d}(x_0, \mathcal{K})$.

   (b) On suppose maintenant que $\mathbf{E}$ est de *dimension finie* et $\mathcal{F}$ désigne un fermé non vide de $\mathbf{E}$. Soit $x_0$ un point de $\mathbf{E}$. Montrer qu'il existe un élément $y_0$ de $\mathcal{F}$ tel que :

$$\|x_0 - y_0\| = \mathrm{d}(x_0, \mathcal{F}). \tag{1}$$

   Montrer brièvement sur un exemple qu'il n'existe pas forcément un et un seul élément $y_0$ vérifiant (1).

   (c) On ne suppose plus que $\mathbf{E}$ est de *dimension finie* mais $\mathcal{F}$ désigne un fermé non vide de $\mathbf{E}$ inclus dans un sous-espace vectoriel $\mathbf{H}$ de $\mathbf{E}$ de dimension finie. Montrer qu'il existe un élément $y_0$ de $\mathcal{F}$ tel que :

$$\|x_0 - y_0\| = \mathrm{d}(x_0, \mathcal{F}).$$

(d) On considère dans cette question $\mathbf{E}$ espace vectoriel de dimension quelconque muni d'un produit scalaire, $\langle\cdot|\cdot\rangle$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit $\mathbf{H}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ de dimension finie et $\mathcal{C}$ un fermé non vide de $\mathbf{E}$ *convexe* et inclus dans $\mathbf{H}$. Montrer que pour tout élément $x$ de $\mathbf{E}$, il existe un et un seul élément de $y$ de $\mathcal{C}$ tel que :

$$\|x-y\| = \mathrm{d}(x,\mathcal{C}), \tag{2}$$

élément que dans la suite nous noterons $\pi_{\mathcal{C}}(x)$.

Pour $x \in \mathbf{E}$, $\pi_{\mathcal{C}}(x)$ s'appelle projeté de $x$ sur $\mathcal{C}$, l'application

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E}\,;\ x \mapsto \pi_{\mathcal{C}}(x)$$

s'appelle projection sur $\mathcal{C}$.

*On pourra considérer des éléments $y$ et $y'$ de $\mathcal{C}$ tels que $\|x-y\| = \|x-y'\| = \mathrm{d}(x,\mathcal{C})$ et montrer en utilisant l'identité du parallélogramme que $y' = y$.*

*Ce résultat se généralise dans le cadre d'espces de Hilbert.*

2. *Etude de la projection sur un fermé convexe*

Dans cette question on garde les notations de 1. (d)

(a) Soit $x \in \mathbf{E}$. Montrer que pour tout élément $y$ de $\mathcal{C}$, $\langle x-\pi_{\mathcal{C}}(x)|y-\pi_{\mathcal{C}}(x)\rangle \leq 0$.

*Indication* : on pourra considérer $N\ :\ [0,1] \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \|x-(ty+(1-t)\pi_{\mathcal{C}}(x))\|^2$.

(b) Réciproquement, montrer que si il existe un élément $u$ de $\mathcal{C}$, tel que pour tout élément $y$ de $\mathcal{C}$, $\langle x-u|y-u)\rangle \leq 0$, alors $u = \pi_{\mathcal{C}}(x)$.

(c) Montrer que pour tout $x$ et tout $y$ éléments de $\mathbf{E}$, $\langle x-y|\pi_{\mathcal{C}}(x)-\pi_{\mathcal{C}}(y)\rangle \geq \|\pi_{\mathcal{C}}(x)-\pi_{\mathcal{C}}(y)\|^2$. En déduire que $\pi_{\mathcal{C}}$ est 1-lipschitzienne.

## Partie II
### Théorème de Brouwer en dimension 1

1. Dans cette question on prend $d = 1$ et $\mathbf{E} = \mathbf{R}$.
2. Montrer le théorème de Brouwer.
3. Montrer que le théorème de Brouwer est encore vrai si l'on ne suppose plus $f$ continue, mais croissante.
4. Le théorème de Brouwer est-il encore vrai si l'on ne suppose plus $f$ continue, mais décroissante.

## Partie III
### Théorème de Brouwer dans le cas d'un triangle
### *FACULTATIVE*

On considère les trois points de $\mathbf{R}^2$, $A = \left(-\frac{1}{2},0\right)$, $B = \left(\frac{1}{2},0\right)$ et $C = \left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $T$ le triangle plein de sommets $A$, $B$ et $C$, c'est-à-dire l'enveloppe convexe de ces trois points, encore noté $[A,B,C]$. Dans la suite le mot *triangle* désignera un triangle plein

Soit $f$ une application continue de $T$ dans $T$. Nous allons montrer que $f$ admet un point fixe. Nous commencerons par des résultats de combinatoire qui fourniront le lemme de Sperner qui constitue en quelque sorte une version discrète du théorème de Brouwer.

1. Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses sommets et $\mathcal{R}$ celui de ses arêtes. Pour tout élément $s$ de $\mathcal{S}$ on note $\deg(s)$ et on appelle degré de $s$, le nombre d'arêtes dont $s$ est une extrémité. On rappelle la formule due à Euler :

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \deg(s) = 2|\mathcal{R}|.$$

Montrer que le nombre de sommets de degré impair est pair (lemme des poignées de mains).

2. On note $A'$ le milieu de $[B,C]$, $B'$ celui de $[A,C]$ et $C'$ celui de $[A,B]$. On dispose de 4 triangles équilatéraux de côté $\frac{1}{2}$, $[A,B',C']$, $[A',B,C']$, $[A',B',C]$ et $[A',B',C']$ et on note $\mathcal{T}_1$ l'ensemble de ces quatre triangles. en divisant alors de même façon chaque triangle de $\mathcal{T}_1$ en 4 triangles équilatéraux de coté $\frac{1}{4}$, on obtient un ensemble $\mathcal{T}_2$ de 16 triangles équilatéraux de coté $\frac{1}{4}$. Plus généralement on construit en répétant l'opération, pour tout entier $n \geq 1$, un ensemble $\mathcal{T}_n$ de $4^n$ triangles équilatéraux de côté $\frac{1}{2^n}$ et l'on note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble de ces $4^n$ triangles, que l'on appelle triangulation d'ordre $n$ de $T$.

   (a) Représenter $\mathcal{T}_3$.

   (b) Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. On définit une application $c_{n_0}$ de l'ensemble $\mathcal{N}_{n_0}$ des sommets de $\mathcal{T}_{n_0}$ dans $\{1,2,3\}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

      i. $c_{n_0}(A) = 1, c_{n_0}(B) = 2, c_{n_0}(C) = 3$.

      ii. L'image par $c_{n_0}$ d'un élément $S$ de $\mathcal{N}_{n_0}$ qui appartient à un des côté du triangle $T$ est égal à l'une des deux valeurs que prend $f_{n_0}$ en les extrémités de ce côté, par exemple si $S \in [A,B]$ alors $c_{n_0}(S) = 1$ ou 2.

      On dit d'une telle application que c'est un *bon coloriage de* la triangulation $\mathcal{T}_{n_0}$.

   Par ailleurs on introduit le graphe non orienté $\mathcal{G}_{n_0}$ dont l'ensemble des sommets est la réunion de $\mathcal{T}_{n_0}$ et de $\{Z\}$, où $Z$ est le complémentaire de l'intérieur de $T$, deux sommets de $G$ sont reliés par une arête s'ils ont en commun un côté telle que l'image par $c_{n_0}$ d'une de ses extrémité soit 1, l'autre 2.

   *Attention! le mot* sommet *désigne dorénavant deux choses distinctes : les sommets du graphe $\mathcal{G}$, et les sommets des éléments de $\mathcal{T}_{n_0}$.*

   Montrer que le degré de $Z$ est impair. Montrer que le degré d'un sommet de $\mathcal{G}$ autre que $Z$ est 2 ou 1 ou 0. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les images de ses sommets par $c_{n_0}$, pour que son degré soit 1.

   (c) Montrer qu'il existe un élément de $\mathcal{T}_{n_0}$ tel que $c_{n_0}$ prenne sur ses sommets les trois valeurs 1, 2 et 3.

   *Ceci constitue un cas particulier en dimension 2 du lemme de* Sperner.

3. On note $g = f - \mathrm{id}_T$, application de $T$ dans $\mathbf{R}^2$ et l'on note $g_1$ sa première composante et $g_2$ sa seconde. Enfin on définit l'application

$$c \ : \ T \to \{1,2,3\} \, ; \ (x,y) \mapsto \begin{cases} 3, & \text{si } g_2 < 0, \\ 1, & \text{si } g_2 \geq 0 \text{ et } g_1 \geq 0, \\ 2, & \text{si } g_2 \geq 0 \text{ et } g_1 < 0. \end{cases}$$

   (a) On suppose que $f$ est sans point fixe. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ la restriction $c_n$ de $c$ à l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des sommets de $\mathcal{T}_n$ est un bon coloriage.

   (b) En appliquant le lemme de Sperner à $\mathcal{T}_n$ pour tout entier $n \geq 1$, déduire que $f$ admet un point fixe.

On a montré la forme particulière du théorème de Brouwer :
*Toute application de $T$ dans $T$ continue admet un point fixe.*

## Partie IV
### Théorème de Brouwer Dans le cas d'un compact convexe d'intérieur non vide

On se donne $\mathbf{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension $d$.

Soit $\mathcal{C}$ un convexe compact de $\mathbf{E}$. On suppose que $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$.

Pour tout élément $x$ de $\mathbf{E}$, On pose

$$J(x) = \left\{ \alpha \in \mathbf{R}_+^* \,\middle|\, \frac{1}{\alpha} \cdot x \in \mathcal{C} \right\}$$

1. Montrer que pour tout élément $x$ de $\mathbf{E}$, l'ensemble $J(x)$ est non vide et minoré, de sorte qu'est bien définie la quantité
$$j(x) = \inf(J(x).$$
2. Montrer que tout élément $x$ de $\mathbf{E}$, **non nul** , l'ensemble $J(x)$ est l'intervalle $[j(x), +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x$ et tout $y$ vecteurs de $\mathbf{E}$, tout réel $\lambda \geq 0$, on a $j(\lambda x) = \lambda j(x)$ et $j(x+y) \leq j(x) + j(y)$.
4. Montrer qu'il existe des réels $m$ et $M$ strictement positifs tels que pour tout $x \in \mathbf{E}$, $m\|x\| \leq j(x) \leq M\|x\|$.
5. Montrer que $\mathcal{C} = \{x \in \mathbf{E} | j(x) \leq 1\}$.
6. On pose $h \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{E}\,;\ x \mapsto \begin{cases} \frac{j(x)}{\|x\|} \cdot x, & \text{pour } x \neq 0, \\ 0, & \text{pour } x = 0. \end{cases}$ Montrer que $h$ réalise un homéomorphisme de $\mathcal{C}$ sur la boule unité de $\mathbf{E}$, $B_{\mathrm{f}}(0,1)$.
7. Montrer que Les convexes compacts de $\mathbf{E}$ d'intérieurs non vides sont homéomorphes.
8. Déduire de la question précédente que dans le cas où $d = 2$, toute application $f$ d'un convexe compact de $\mathbf{E}$ d'intérieur non vide dans lui-même, continue, admet un point fixe.

**On admet dans la suite que ce résultat se généralise dans le cas où $d$ est un entier naturel non nul quelconque**

9. On suppose qu'en plus $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à $0_E$, c'est-à-dire que pour tout élément $x$ de $\mathcal{C}$, on a $-x \in \mathcal{C}$.

   Montrer qu'il existe une norme sur $\mathbf{E}$ telle que $\mathcal{C}$ soit la boule unité fermée de $\mathbf{E}$ pour cette norme.

## Partie V
### Théorème de Brouwer Dans le cas général

1. Dans cette sous-question $K$ désigne un convexe compact de $\mathbf{R}^d$ contenant 0 et non réduit à un point. On note $\mathbf{E}_K$ le sous-espace vectoriel engendré par $K$.

   Montrer qu'il existe $p$ éléments $x_1, x_2, \dots, x_p$ de $K$ linéairement indépendants tels que $\mathbf{E}_K$ soit engendré par $(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

   Soit l'application $\theta \ : \ \mathbf{R}^p \to \mathbf{E}_K\,; (\lambda_1, \dots \lambda_p) \mapsto \lambda_1 x_1 + \dots, +\lambda_p x_p$. Montrer que si l'on pose
$$\Delta = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p | \lambda_1 > 0, \dots \lambda_p > 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_p < 1\},$$
   alors $\theta(\Delta) \subset K$,
2. Déduire de ce qui précède que $K$ est d'intérieur non vide dans l'espace vectoriel $\mathbf{E}_K$.

3. Démontrer le théorème de Brouwer.

## Partie VII
### Théorème de Schauder
### FACULTATIF

Dans cette partie on utilisera la forme général du théorème de Brouwer, pour le généraliser en dimension quelconque sous la forme suivante :

**Théorème de Schauder** — *Soit* $\mathbf{E}$ *un espace vectoriel sur* $\mathbf{R}$ *de dimension quelconque, muni d'un produit scalaire. Soient* $\mathcal{C}$ *un convexe compact non vide de* $\mathbf{E}$ *et* $f$ *une application de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{C}$*, continue. Alors* $f$ *admet un point fixe.*

Dans la suite $\mathbf{E}$ désigne un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbf{E}$, $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire, $\mathcal{C}$ un convexe compact non vide de $\mathbf{E}$ et et $f$ une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, continue.

1. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\mathrm{o}}(x_i, \varepsilon)$. On pourra raisonner par l'absurde.
2. Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif.
   (a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathbf{E}_\varepsilon$ de $\mathbf{E}$ de dimension finie tel que si l'on pose $F_\varepsilon := \mathbf{E}_\varepsilon \cap \mathcal{C}$ on ait, pour tout élément $x$ de $\mathcal{C}$, :
   $$\mathrm{d}(x, F_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$
   (b) Montrer que $F_\varepsilon$ est fermé. On désignera, cf. première partie par $\pi_{F_\varepsilon}$ la projection sur $F_\varepsilon$.
   (c) Montrer que $\pi_{F_\varepsilon} \circ f$ admet un point fixe.
3. En déduire le théorème de Schauder.

*Le théorème de Schauder s'utilise dans la preuve d'existence de solutions d'équations différentielles.*

⋆ ⋆

⋆

# Indications pour le DM n°3

**Théorèmes du point fixe de Brouwer et de Schauder**

## Partie I

Théorème de projection sur un fermé convexe en dimension finie

1. (a) L'application $K \to \mathbf{R}\, x \mapsto \|x_0 - x\|$ est continue car 1-lipschitzienne, sur le compact $K$ non vide, elle atteint donc sa borne inférieure en un un élément $y_0$ de $\mathbf{K}$ on a :

$$\boxed{\|x_0 - y_0\| = \mathrm{d}(x_0, \mathcal{K})}$$

(b) Voir TD.

(c) Voir TD

(d) On suppose qu'il existe $x_1$ et $x_1$ tels que $\|x - x_1\| = \|x - x_2\| = d(x, \mathcal{C})$

Utiliser l'inégalité du parallélogramme avec un dessin.

$$2\|x - x_1\|^2 + 2\|x - x_2\|^2 = \|(x - x_1) + (x - x_2)\|^2 + \|(x - x_1) - (x - x_2)\|^2,$$

donc

$$d(x, \mathcal{C})^2 = \left\|\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right\|^2 + \frac{1}{4}\|x_2 - x_1\|^2$$

Or $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in$ .... etc.

2. *Etude de la projection sur un fermé convexe*

Dans cette question on garde les notation de **1. (d)**

(a) Prenons $y \neq \pi_{\mathcal{C}}(x)$. Pour tout élément $t$ de $[0, 1]$, $\mathcal{C}$ étant convexe, $(ty + (1-t)\pi_{\mathcal{C}}(x)) \in \mathcal{C}$ et donc $N(t) \geq \|x - \pi_{\mathcal{C}}(x)\|^2$...

Pour tout $t$ de $]0, 1[$

$$t\|y - \pi_{\mathcal{C}}(x)|^2 - 2\langle x - \pi_{\mathcal{C}}(x) | y - \pi_{\mathcal{C}}(x)\rangle \geq 0.$$

En laissant tendre vers 0, le résultat vient.

(*Un petit dessin!*)

(b) Soit $y \in \mathcal{C}$,

$$\|x - y\|^2 = \|x - u\|^2 + \|u - y\|^2 + \underbrace{2\langle x - u | u - y\rangle}_{\geq 0} \geq \|x - u\|^2.$$

.....

(c) En particulier puisque $\pi_{\mathcal{C}}(y) \in \mathcal{C}$, on a $\langle x - \pi_{\mathcal{C}}(x) | \pi_{\mathcal{C}}(y) - \pi_{\mathcal{C}}(x)\rangle \leq 0$, donc puisque $x - \pi_{\mathcal{C}}(x) = \big(x - y\big) + \big(y - \pi_{\mathcal{C}}(x)\big)$ :

$$\langle x - y | \pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y)\rangle \geq \langle \pi_{\mathcal{C}}(x) - y | \pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y)\rangle = \|\pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y)\|^2 - \langle y - \pi_{\mathcal{C}}(y) | \pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y$$

Conclure par (a) puis l'inégalité de Schwarz

## Partie II
### Théorème de Brouwer en dimension 1

1. Dans cette question on prend $n = 1$ et $\mathbf{E} = \mathbf{R}$. Un convexe de $\mathbf{R}$ est un intervalle, un convexe compact qui est de plus fermé et borné est donc un segment, donc $\mathcal{C}$ est un segment ($[a, b]$.

   On exclut dans la suite le cas trivial où $a = b$.
2. Considérer $g$ l'application $f - id_{[a,b]}$.
3. Permier cas : le point $a$ est un point fixe de $f$.

   Second cas : Le point $a$ n'est pas point fixe de $f$ et donc $f(a) > a$. Posons $A := \{x \in [a, b] | f(x) > x\}$, cet ensemble est donc non vide, puisque comptant $a$ parmi ses éléments, majoré par $b$, il admet une borne supérieure $s$ élément de $[a, b]$.

   La propriété caractéristique de la borne supérieure assure l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers $s$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n < f(x_n)$ et $f$ étant croissante : $x_n < f(x_n) \leq f(s) \leq b$ Par passage à la limite sur $n$ :

   $$s \leq f(s) \leq b.$$

   • Supposons d'abord $s < b$. Alors pour tout $x \in ]s, b]$, $f(x) < x$. En laissant tendre $x$ vers $s$ par valeurs strictement supérieures, puisque la croissance de $f$ assure l'existence pour $f$ d'une limite à droite qui est supérieure à $f(s)$, on a :

   $$f(s) \leq f(s_+) \leq s.$$

   • Supposons maintenant que $s = b$, alors $f(s) = f(b) \leq b = s$, car $f$ à valeur dans $[a, b]$.

   Donc dans les deux cas :

   $$f(s) \leq s,$$

   Si bien qu'au total $s \leq f(s) \leq s$, ce qui assure $f(s) = s$.

   Finalement dans tous les cas <u>$f$ admet un point fixe.</u>
4. Non ! ......

## Partie III
### Théorème de Brouwer dans le cas d'un triangle

## Partie IV
### Théorème de Brouwer dans le cas d'un compact convexe d'intérieur non vide

1. Notons pour $x \in \mathbf{E}$, $J(x) = \left\{\alpha \in \mathbf{R}_+^* | \frac{1}{\alpha} \cdot x \in \mathcal{C}\right\}$. Comme $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, on dispose d'un réel $r > 0$ tel que la boule fermée de centre 0 de rayon $r$ soit incluse dans $\mathcal{C}$. On en déduit que $J(x)$ est donc non vide, minoré par 0, il admet une borne inférieure, ce qui assure la définition de $j$.

2. Soit $x \in \mathbf{E}$.

   **Remarque :** trivialement $J(0) = \mathbf{R}_+^*$ et donc $j(0) = 0$. La réciproque est vraie, si $j(x) = 0$ alors $x = 0$......

   Supposons $x$ non nul. Soit $\alpha$ un élément de $J(x)$. Soit alors un réel $\beta \geq \alpha$. Montrer que $\beta \in J(x)$ . Donc $J(x)$ est un intervalle d'extrémité inférieure $j(x)$ et supérieure $+\infty$. Mais en désignant par $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite minimisante $\left(\frac{x}{a_n}\right)_{n\in N}$ est à valeurs dans le FERMÉ $\mathcal{C}$, etc.

3. Soit un réel $\lambda \geq 0$.

   Soit $x \in E \setminus \{0\}$ on a $\frac{x}{\alpha} \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\frac{\lambda x}{\lambda \alpha} \in \mathcal{C}$, donc $\quad J(\lambda x) = \lambda J(x)$. Alors

$$[j(\lambda x), +\infty[= J(\lambda x) = \lambda J(x) = \lambda [j(x), +\infty] = [\lambda j(x), +\infty[.$$

   Donc $\boxed{j(\lambda x) = \lambda j(x)}$, égalité qui se trivialise en $0 = 0$ si $\lambda = 0$, par la remarque.

   Soit de plus $y \in \mathbf{E}$ non nul.

$$\frac{x+y}{j(x)+j(y)} = \frac{j(x)\frac{x}{j(x)} + j(y)\frac{y}{j(y)}}{j(x)+j(y)} \cdots$$

4. Soit $x \in \mathbf{E}$ non nul.

   • Le point 0 est intérieur à $\mathcal{C}$, donc nous disposons d'un réel $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset \mathcal{C}$. Posons $M = \frac{2}{r}$.

   • Par ailleurs $\mathcal{C}$ étant compact est borné : on dispose de $R > 0$ tel que $K \subset B_o(0, R)$. Posons $m = \frac{1}{R}$

   On montre facilement la double inégalité :

$$\boxed{m\|x\| \leq j(x) \leq M\|x\|,}$$

   inégalité qui dégénère si l'on remplace $x$ par 0 en $0 \leq 0 \leq 0$.

5. Par définition de $J(x)$ on a : $x \in \mathcal{C}$ si et seulement si $1 \in J(x) = [j(x), +\infty[$, soit si et seulement si $j(x) \leq 1$.

6. • D'abord $h$ est bijective. de bijection réciproque $k \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{E}\,;\ y \mapsto \begin{cases} \frac{\|y\|}{j(y)} \cdot y, & \text{pour } y \neq 0, \\ 0, & \text{pour } x = 0. \end{cases}$.

   Faire un raisonnement par analyse synthèse....

   • Ensuite observons que $j$ est continue. En effet Pour $x, y \in E$ on a $j(x) \leq j(x - y) + j(y)$ donc $j(x) - j(y) \leq j(x-y)$. Par symétrie des rôles de $x$ et $y$, on a :

$$|j(x) - j(y)| \leq j(x-y) \leq M\|x - y\|,$$

   Comme $j$ et la norme sont continues il est clair que $h$ est continue en tout point l'*ouvert* $\mathbf{E} - \{0\}$. La continuité en 0 résulte de la majoration

$$0 \leq \|h(x) - 0\| = j(x) \leq M\|x\|.$$

   • Raisonner de même pour la continuité de $k$

   Donc $h$ est un homéomorphisme.

   • Enfin pour tout $x \in \mathbf{E}$, on a $\|h(x)\| = j(x)$, donc $\|h(x)\| \leq 1$ si et seulement si $j(x) \leq 1$....

7. Soit $\mathcal{C}$ un convexe compact d'intérieur non vide. Choisissons un élément $a$ de l'intérieur de $\mathcal{C}$ et posons $\mathcal{C}_a = \mathcal{C} + \{-a\}$. Appliquer ce qui précède à $\mathcal{C}_a = \mathcal{C} + \{-a\}$.

8. Soit $\mathcal{C}$ un convexe compact d'intérieur non vide. La question précédente nous fournit un homéomorphisme $h$ de $\mathcal{C}$ sur $T$ (cf. partie III.). Soit $f$ une application continue de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. Posons $h \circ f \circ h^{-1}$ est une application de $T$ dans lui-même, qui hérite de la continuité de $f$ etc...

## Partie V

### Théorème de Brouwer dans le cas général

1. Dans cette sous-question $K$ désigne un convexe compact de $\mathbf{R}^n$ contenant 0 et non réduit à un point. On note $E_{\mathbf{K}}$ le sous-espace vectoriel engendré par $K$.

   $E_{\mathbf{K}}$ est un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ donc est de dimension finie non nulle $p \leq n$. De l'ensemble générateur $K$ on peut donc extraire une base $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

   $\theta$ est un isomorphisme d'espace vectoriel puisque $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de $E$. C'est donc aussi un homéomorphisme (toute application linéaire est continue en dimension finie). Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \Delta$ on a $\theta(\lambda) = (1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i)0 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ barycentre de points de $K$ à coefficients positifs, donc élément du *convexe* $K$. Ainsi $\theta(\Delta) \subset K$.
2. $\theta$ est un isomorphisme d'espace vectoriel puisque $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de $E$. C'est donc aussi un homéomorphisme (toute application linéaire est continue en dimension finie).

   $\Delta$, est ouvert comme image réciproque de ...... Il est non vide car il contient

   $$\frac{1}{p+1}(1, 1, \ldots, 1)$$

   . $\theta$ est un homéomorphisme donc $\theta(\Delta)$ est un ouvert non vide de $E$, inclus dans $K$ donc l'intérieur de $K$ est non vide dans $E_{\mathbf{K}}$, muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{E}$.
3. On exclut le cas trivialissime où $\mathcal{C}$ est un singleton. Soit $a$ un point de $\mathcal{C}$. Par $(e1, ..., en)$ on désigne une base de E.

   Soit $L$ l'application affine de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{E}$ définie par $L(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. $L$ est bijective et c'est un homéomorphisme (toute application affine en dimension finie est continue). Notons $K = L^{-1}(\mathcal{C})$. Considérer $L^{-1} \circ f \circ L$ et montrer qu'on peut lui appliquer (e)....

## Partie VI
### Théorème de Schauder

1. Vu en exercice de colles.
2. Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif.
   (a) D'après le 1. il existe une famille finie $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'éléments de $\mathcal{C}$, telle que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_o(x_i, \varepsilon)$.

   Soit alors $E_\varepsilon$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, et $F_\varepsilon = E_\varepsilon \cap \mathcal{C}$...

   (b) L'espace $E_\varepsilon$ est de dimension finie donc il est fermé (cf. exercice de colle). Donc $F_\varepsilon$ est fermé comme intersection des fermés $F$ et $E_\varepsilon$.

   (c) $F_\varepsilon$ est fermé et convexe car .... Comme $F_\varepsilon$ est fermé inclus dans $K$ compact, $F_\varepsilon$ est convexe compact.

   $\pi_\varepsilon \circ f_{/F_\varepsilon}$ est une application continue de $F_\varepsilon$ dans lui même. $E_\varepsilon$ étant de dimension fini on peut appliquer le théorème de Brouwer : il existe $x_\varepsilon \in F_\varepsilon$ tel que :

   $$\boxed{\pi_\varepsilon \circ f(x_\varepsilon) = x_\varepsilon}$$

   Soit une suite de réels strictement positifs $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tendant vers 0 et avec les notation de la précédente sous-question, $u_n = x_{\varepsilon_n}$. Quitte à opérer une extraction on peut supposer, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, que la suite $(u_n)_{n \in N}$ converge vers $u \in K$....

# Correction du DM n°4

**Théorèmes du point fixe de Brouwer et de Schauder**

3.

## Partie I

Théorème de projection sur un fermé convexe en dimension finie

1. (a) L'application $K \to \mathbf{R}\, x \mapsto \|x_0 - x\|$ est continue car 1-lipschitzienne, sur le compact $K$ non vide, elle atteint donc sa borne inférieure en un un élément $y_0$ de $\mathbf{K}$ on a :

$$\boxed{\|x_0 - y_0\| = \mathrm{d}(x_0, \mathcal{K})}$$

   (b) Voir TD.

   (c) Voir TD

   (d) On suppose qu'il existe $x_1$ et $x_1$ tels que $\|x - x_1\| = \|x - x_2\| = d(x, \mathcal{C})$

   L'inégalité du parallélogramme affirme :

$$2\|x - x_1\|^2 + 2\|x - x_2\|^2 = \|(x - x_1) + (x - x_2)\|^2 + \|(x - x_1) - (x - x_2)\|^2,$$

   donc

$$d(x, \mathcal{C})^2 = \left\| \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right\|^2 + \frac{1}{4}\|x_2 - x_1\|^2.$$

Place pour un dessin

   Or par convexité de $\mathcal{C}$ vient $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in \mathcal{C}$, donc

$$d(x, \mathcal{C})^2 \geq d(x, \mathcal{C})^2 + \frac{1}{4}\|x_2 - x_1\|^2.$$

   Donc la quantité positive ou nulle $\|x_2 - x_1\|^2$ est nulle, et donc $X - 2 = X - 1$.

   La distance de $x$ à $\mathcal{C}$ ets atteinte en un et un seul point.

2. (a) Prenons $y \neq \pi_{\mathcal{C}}(x)$. Pour tout élément $t$ de $[0, 1]$, $\mathcal{C}$ étant convexe, $(ty + (1-t)\pi_{\mathcal{C}}(x)) \in \mathcal{C}$ et donc $N(t) \geq \|x - \pi_{\mathcal{C}}(x)\|^2$, ce qui s'écrit :

$$t^2\|y - \pi_{\mathcal{C}}(x)|^2 - 2t\langle x - \pi_{\mathcal{C}}(x) | y - \pi_{\mathcal{C}}(x)\rangle \geq 0.$$

et même en se limitant aux éléments $t$ de $[0,1[$

$$t\|y-\pi_{\mathcal{C}}(x)|^2 - 2\langle x-\pi_{\mathcal{C}}(x)|y-\pi_{\mathcal{C}}(x)\rangle \geq 0.$$

En laissant tendre $t$ vers 0, dans l'égalité précédente, par valeur strictement positives, on a donc :

$\boxed{\langle x-\pi_{\mathcal{C}}(x)|y-\pi_{\mathcal{C}}(x)\rangle \leq 0}$

Inégalité triviale pour $y=\pi_{\mathcal{C}}(x)$.

*(Un petit dessin!)*

(b) Soit $y \in \mathcal{C}$,

$$\|x-y\|^2 = \|x-u\|^2 + \|u-y\|^2 + \underbrace{2\langle x-u|u-y)\rangle}_{\geq 0} \geq \|x-u\|^2.$$

Donc $\|x-u\| = d(x,\mathcal{C})$, et donc :

$$\boxed{u=\pi_{\mathcal{C}}(x)}$$

(c) En particulier puisque $\pi_{\mathcal{C}}(y) \in \mathcal{C}$, on a $\langle x-\pi_{\mathcal{C}}(x)|\pi_{\mathcal{C}}(y)-\pi_{\mathcal{C}}(x)\rangle \leq 0$, donc puisque $x-\pi_{\mathcal{C}}(x) = \big(x-y\big) + \big(y-\pi_{\mathcal{C}}(x)\big)$ :

$$\langle x-y|\pi_{\mathcal{C}}(x)-\pi_{\mathcal{C}}(y)\rangle \geq \langle \pi_{\mathcal{C}}(x)-y|\pi_{\mathcal{C}}(x)-\pi_{\mathcal{C}}(y)\rangle = \\ \|\pi_{\mathcal{C}}(x)-\pi_{\mathcal{C}}(y)\|^2 - \langle y-\pi_{\mathcal{C}}(y)|\pi_{\mathcal{C}}(x)-\pi_{\mathcal{C}}(y)\rangle\,.$$

Si $\pi_{\mathcal{C}}(x) \neq \pi_{\mathcal{C}}(y)$ alors il découle de l'inégalité de Schwarz que :

$$\boxed{\|\pi_{\mathcal{C}}(x)-\pi_{\mathcal{C}}(y)\| \leq \|x-y\|}$$

Ce qui est encore vrai si $\pi_{\mathcal{C}}(x)=\pi_{\mathcal{C}}(y)$.

Ainsi $\pi_{\mathcal{C}}$ *est-elle lipschitzienne de rapport* 1.

## Partie II

### Théorème de Brouwer en dimension 1

1. Dans cette question on prend $n=1$ et $\mathbf{E}=\mathbf{R}$. Un convexe de $\mathbf{R}$ est un intervalle, un convexe compact qui est de plus fermé et borné est donc un segment, donc $\mathcal{C}$ est un segment ($[a,b]$.

   On exclut dans la suite le cas trivial où $a=b$.

2. Soit $g$ l'application $f-id_{[a,b]}$. Cette application est *continue* de plus $g(a)=f(a)-a \geq 0$ et $g(b)=f(b)-b \leq 0$. Le théorème de la valeur intermédiaire affirme que $g$ s'annule, c'est-à-dire :

   $f$ admet un point fixe.

3. Preuve 1

   Posons $A := \{x \in [a,b] | f(x) > x\}$, cet ensemble est donc non vide, puisque comptant $a$ parmi ses éléments, majoré par $b$, il admet une borne supérieure $s$ élément de $[a,b]$.

   La propriété caractéristique de la borne supérieure assure l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers $s$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n < f(x_n)$ et $f$ étant croissante : $x_n < f(x_n) \leq f(s) \leq b$ Par passage à la limite sur $n$ :

$$s \leq f(s) \leq b.$$

• Supposons d'abord $s < b$. Alors pour tout $x \in ]s, b]$, par définition de $A$ et croissance de $f$,

$$f(s) \leq f(x) \leq x.$$

En laissant tendre $x$ vers $s$ par valeurs strictement supérieures,

$$f(s) \leq s.$$

• Supposons maintenant que $s = b$, alors $f(s) = f(b) \leq b = s$, car $f$ à valeur dans $[a, b]$.

Donc dans les deux cas :

$$f(s) \leq s,$$

Si bien qu'au total $s \leq f(s) \leq s$, ce qui assure $f(s) = s$.

Finalement dans tous les cas $f$ admet un point fixe.

Preuve 2

Posons $B := \{x \in [a, b] | f(x) \geq x\}$, cet ensemble est donc non vide, puisque comptant $a$ parmi ses éléments, majoré par $b$, il admet une borne supérieure $s$ élément de $[a, b]$. La propriété caractéristique de la borne supérieure assure l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers $s$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \leq f(x_n)$ et $f$ étant croissante : $x_n \leq f(x_n) \leq f(s) \leq b$. Par passage à la limite sur $n$ :

$$s \leq f(s) \leq b.$$

Supposons que $s < f(s)$, alors $f(s)$ n'est pas élément de $B$ et donc $f(f(s)) < f(s)$, mais la croissance de $f$ assure au contraire que $f(s) \leq f(f(s))$, d'où une contradiction.

Finalement $f(s) = s$.

4. Non ! l'application $f$ de $[0, 1]$ dans lui-même qui à $x$ associe 1, pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et 0, pour $x \in ]\frac{1}{2}, 1]$ apporte un cruel démenti à la réciproque.

## Partie III
Théorème de Brouwer dans le cas d'un triangle

## Partie IV
Théorème de Brouwer dans le cas d'un compact convexe d'intérieur non vide

1. Notons pour $x \in \mathbf{E}$, $J(x) = \left\{\alpha \in \mathbf{R}_+^* | \frac{1}{\alpha} \cdot x \in \mathcal{C}\right\}$. Comme $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, on dispose d'un réel $r > 0$ tel que la boule fermée de centre 0 de rayon $r$ soit incluse dans $\mathcal{C}$. Si $x$ est non nul, alors $\frac{\|x\|}{r}$ est élément de $J(x)$, tandis que 2024 est élément de $J(0)$, puisque 0 est élément de $\mathcal{C}$.

   Donc $J(x)$ est donc non vide, minoré par 0, il admet une borne inférieure, ce qui assure la définition de $j$.

2. Soit $x \in \mathbf{E}$.

   **Remarque :** trivialement $J(0) = \mathbf{R}_+^*$ et donc $j(0) = 0$. La réciproque est vraie, si $j(x) = 0$ alors $x = 0$. En effet supposons $x$ non nul, prenons $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que la boule fermé de centre 0 et de rayon $R$ contienne $\mathcal{C}$ (cet ensemble est borné car compact), la propriété caractéristique de la borne inférieure fourni un élément $\alpha$ de $J(x)$ tel que $\alpha < \frac{\|x\|}{R}$ et voila que :

$$\frac{1}{\alpha} x \in \mathcal{C},$$

tandis que

$$\left\|\frac{1}{\alpha}x\right\| > R,$$

ce qui est absurde !

Ceci étant, soit $x \in \mathbf{E}$ non nul. Soit $\alpha$ un élément de $J(x)$. Soit alors un réel $\beta \geq \alpha$

$$\frac{x}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x}{\alpha} + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)0,$$

donc comme $\frac{\alpha}{\beta} \in [0, 1]$, par convexité de $\mathbf{C}$ on a $\beta \in J(x)$ [1]. Donc $J(x)$ est un intervalle d'extrémité inférieure $j(x)$ et supérieure $+\infty$. Mais la propriété caractéristique de la borne inférieure, fournit une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, d'élément de $J(x)$ qui converge vers $j(x)$. Comme $\left(\frac{x}{a_n}\right)_{n\in N}$ est à valeur dans le FERMÉ $\mathcal{C}$, sa limite $\frac{x}{j(x)}$ est élément de $\mathcal{C}$, et donc

$$J(x) = [j(x), +\infty[.$$

3. Soit un réel $\lambda \geq 0$.

   Soit $x \in E \setminus \{0\}$ on a $\frac{x}{\alpha} \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\frac{\lambda x}{\lambda\alpha} \in \mathcal{C}$, donc $J(\lambda x) = \lambda J(x)$. Alors

$$[j(\lambda x), +\infty[= J(\lambda x) = \lambda J(x) = \lambda[j(x), +\infty] = [\lambda j(x), +\infty[.$$

   Donc $\boxed{j(\lambda x) = \lambda j(x)}$, égalité qui se trivialise en $0 = 0$ si $\lambda = 0$, par la remarque.

   Soit de plus $y \in \mathbf{E}$ non nul.

$$\frac{x + y}{j(x) + j(y)} = \frac{j(x)\frac{x}{j(x)} + j(y)\frac{y}{j(y)}}{j(x) + j(y)}.$$

   comme $\frac{x}{j(x)}$ et $\frac{y}{j(y)}$ sont éléments de $\mathcal{C}$, par convexité de ce dernier $\frac{x+y}{j(x)+j(y)} \in \mathcal{C}$. Donc :

$$\boxed{j(x + y) \leq j(x) + j(y).}$$

4. Soit $x \in \mathbf{E}$ non nul.

   • Le point 0 est intérieur à $\mathcal{C}$, donc nous disposons d'un réel $r > 0$ tel que $\mathrm{B_f}(0, r)$, boule fermé de centre 0 de rayon $r$ soit incluse dans $\subset \mathcal{C}$. Posons $M = \frac{1}{r}$.

   • Par ailleurs $\mathcal{C}$ étant compact est borné : on dispose de $R > 0$ tel que $K \subset B_{\mathrm{f}}(0, R)$. Posons $m = \frac{2}{R}$

   Pour tout $x \in \mathbf{E}$ non nul, on a :

   — $\left\|\frac{x}{M\|x\|}\right\| = r$ donc $\frac{x}{M\|x\|} \in \mathrm{B_f}(0, r) \subset \mathcal{C}$ , et donc $M\|x\| \in J(x)$ ;

   — $\left\|\frac{x}{m\|x\|}\right\| = 2R$ donc $\frac{x}{m\|x\|}$ n'est pas élément de $\mathcal{C}$ , et donc $m\|x\| \notin J(x)$.

   D'où la double inégalité :

$$\boxed{m\|x\| \leq j(x) \leq M\|x\|,}$$

   inégalité qui dégénère si l'on remplace $x$ par 0 en $0 \leq 0 \leq 0$.

5. Par définition de $J(x)$ on a : $x \in \mathcal{C}$ si et seulement si $1 \in J(x) = [j(x), +\infty[$, soit si et seulement si $j(x) \leq 1$.

1. Avec un dessin on peut affirmer ceci sans l'égalité précédente

6. Vérifions que $h$ est bijective : d'abord 0 est le seul antécédent de 0 (puisque pour tout élément $x$ non nul de $\mathcal{C}$, on a $j(x) \geq m\|x\| > 0$ donc $h(x) \neq 0$). Considérant $y \neq 0$ et $x \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$.

   Supposons que $h(x) = y$ ; on a alors $\|y\| = j(x)$ et $j(y) = \frac{j^2(x)}{\|x\|} = \frac{\|y\|^2}{\|x\|}$ donc $\|x\| = \frac{\|y\|^2}{j(y)}$. Par suite nécessairement $x = \frac{\|x\|}{j(x)} y = \frac{\|y\|}{j(y)} y$.

   Réciproquement supposons $x = \frac{\|y\|}{j(y)} y$. Alors $j(x) = \|y\|$ et $\|x\| = \frac{\|y\|^2}{j(y)}$ donc $h(x) = \|y\| \frac{j(y)}{\|y\|^2} \frac{\|y\|}{j(y)} y = y$.

   Comme $\|h(x)\| = j(x)$, $h$ induit une bijection de l'ensemble $\mathcal{C} = \{x | j(x) \leq 1\}$ sur $B = \{y | \; \|y\| \leq 1\}$.

   Pour commencer observons que $j$ est continue. en effet Pour $x, y \in E$ on a

$$j(x) \leq j(x-y) + j(y)$$

   donc

$$j(x) - j(y) \leq j(x-y).$$

   La situation étant symétrique : $|j(x) - j(y)| \leq j(x-y) \leq M\|x-y\|$ c'est à dire que $j$ est $M-$lipschitzienne, donc continue.

   Comme $j$ et la norme sont continues il est clair que $h$ est continue sur l'ouvert $\mathbf{E} - \{0\}$. La continuité en 0 résulte de $\|h(x)\| = j(x) \leq M\|x\|$.

   De même la réciproque $k$ de $h$ : $k(y) = \frac{\|y\|}{j(y)} y$ et $k(0) = 0$ est continue sur l'ouvert $\mathbf{E} - \{0\}$, ($j$ ne s'annule qu'en 0) et aussi en 0 car $\|k(y)\| = \frac{\|y\|^2}{j(y)} \leq \frac{1}{m}\|y\|$.

   Donc $h$ réalise un homéomorphisme de $\mathcal{C}$ sur la boule unité de $\mathbf{E}$, $B_{\mathrm{f}}(0,1)$.

7. Soit $\mathcal{C}$ un convexe compact d'intérieur non vide. Choisissons un élément $a$ de l'intérieur de $\mathcal{C}$ et posons $\mathcal{C}_a = \mathcal{C} - \{a\}$ (translaté de $\mathcal{C}$ de vecteur $-a$). Comme $a \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, on dispose d'un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$, $\mathrm{B_o}(a, r)$, soit incluse dans $\mathcal{C}$. Alors $\mathrm{B_o}(0, r) = \mathrm{B_o}(a, r) - \{a\} \subset \mathcal{C}_a$ et donc $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_a$. Donc d'après ce qui précéde $\mathcal{C}_a$ est homéomorphe à la boule fermée unité, et donc, la translation de vecteur $-a$ étant trivialement un homéomorphisme (affine) de $\mathbf{E}$ sur $\mathbf{E}$, $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $\mathrm{B_f}(0,1)$.

   Donc deux compacts d'intérieurs non vide de $\mathbf{E}$ sont homéomorphes, car homéomorphes à $\mathrm{B_f}0,1)$).

   **Remarque.** *Si l'on suppose de plus que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine ( si $x \in \mathcal{C}$ alors $-x \in \mathcal{C}$), on montre sans mal que $j(x) = j(-x)$, pour tout élément $x$ de $\mathbf{E}$. Alors par la question 3, et le fait déjà mentionné que $j(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, on a que $j$ est une norme dont la boule unité est $\mathcal{C}$ par 5.*

   *On a montré :* **tout compact convexe qui est symétrique par rapport à l'origine et tel que 0 lui soit intérieur, est la boule fermée unité d'une certaine norme.**

   *Remarquons qu'il suffit de supposer que l'intérieur de $\mathcal{C}$ est non vide. En effet prenons un point $a$ intérieur à $\mathcal{C}$, le point $-a$ l'est aussi ; désignons alors par $B$ une boule ouverte centrée en $a$ incluse dans $\mathcal{C}$, par symétrie de $\mathcal{C}$, l'ensemble $-B$ est une boule ouverte centrée en $-a$ incluse dans $\mathcal{C}$, puis par convexité,l'ensemble $\frac{1}{2}(B - B)$ est une boule centrée en 0 incluse dans $\mathcal{C}$, ce qui fait de 0 un point intérieur à $\mathcal{C}$.*

8. Soit $\mathcal{C}$ un convexe compact d'intérieur non vide. La question précédente nous fournit un homéomorphisme $h$ de $\mathcal{C}$ sur $T$ (cf. partie III.). Soit $f$ une application continue de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. Posons $h \circ f \circ h^{-1}$ est une application de $T$ dans lui-même, qui hérite de la continuité

de $f$ $h$ et $h^{-1}$. D'après III. elle admet un point fixe $a$. mais alors $f(h^{-1}(a) = h^{-1}(a)$ c'est-à-dire :

$f$ admet comme point fixe $(h^{-1}(a))$.

## Partie V
### Théorème de Brouwer dans le cas général

1. $E_{\mathbf{K}}$ est un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ donc est de dimension finie non nulle $p \leq n$. De l'ensemble générateur $K$ on peut donc extraire une base $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

   $\theta$ est un isomorphisme d'espace vectoriel puisque $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de $E$. C'est donc aussi un homéomorphisme (toute application linéaire est continue en dimension finie). Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \Delta$ on a $\Delta(\lambda) = (1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i)0 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ barycentre de points de $K$ à coefficients positifs, donc élément du *convexe* $K$. Ainsi $\theta(\Delta) \subset K$.
2. $\theta$ est un isomorphisme d'espace vectoriel puisque $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de $E$. C'est donc aussi un homéomorphisme (toute application linéaire est continue en dimension finie).

   $\Delta$, est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $(\mathbf{R}_+^*)^p \times ]0, 1[$ par l'application continue car linéaire sur $\mathbf{R}^p$,

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i).$$

   Il est non vide car il contient $\frac{1}{p+1}(1, 1, \ldots, 1)$. $\theta$ est un homéomorphisme donc $\theta(\Delta)$ est un ouvert non vide de $E$, inclus dans $K$ donc l'intérieur de $K$ est non vide dans $E_{\mathbf{K}}$, muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{E}$.
3. On exclut le cas trivialissime où $\mathcal{C}$ est un singleton. Soit $a$ un point de $\mathcal{C}$ l'application affine de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{E}$ définie par $L(x) = a + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. $L$ est bijective et c'est un homéomorphisme (toute application affine en dimension finie est continue). Notons $K = L^{-1}(\mathcal{C})$ : $K$ est non réduit à un point (bijectivité de $L$), il est aussi convexe car $L^{-1}$ est affine, compact car $L^{-1}$ est continue et 0, d'image $a$ par $L$, est élément de $K$. La question (g) dit que $K$ est dans le sous espace $\mathbf{E}_K$ d' intérieur non vide.

   $L^{-1} \circ f \circ L$ est une application de $K$ dans lui-même continue donc continue pour la topologie induite par celle de $\mathbf{E}$ sur $\mathbf{E}_K$. Elle admet donc un point fixe $v$ d'après (e). Alors $L(v)$ est point fixe de $f$.

On a donc prouvé la forme générale du théorème de Brouwer.

## Partie VI
### Théorème de Schauder

1. Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Supposons que pour toute famille finie $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'éléments de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ ne soit pas inclus dans $\bigcup_{i=1}^{k} B_o(x_i, \varepsilon)$. Soit alors $y_1$ un point de de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ n'est pas inclus dans $B_o(y_1, \varepsilon)$ donc il existe $y_2 \in \mathcal{C}$ tel que $y_2 \notin B_o(y_1, \varepsilon)$. Comme $\mathcal{C}$ n'est pas d'avantage inclus dans $B_o(y_1, \varepsilon) \cup B_o(y_2, \varepsilon)$ il est loisible de considérer un élément de $\mathcal{C}$ qui n'est pas élément de $B_o(y_1, \varepsilon) \cup B_o(y_2, \varepsilon)$. plus généralement par récurrence on construit une suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ d'élément de $\mathcal{C}$ telle que pour tout entuer $n \geq 2$, $y_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} B_o(y_i, \varepsilon)$. En particulier pour tout $p$ et tout $q$ naturels, $\|y_p - y_q\| \geq \varepsilon$. Donc aucune

suite extraite de $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ n'est de Cauchy, donc n'est susceptible de converger, ce qui contredit la compacité de $\mathcal{C}$.

D'où le résultat.

2. Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif.

   (a) D'après le 1. il existe une famille finie $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'éléments de $\mathcal{C}$, telle que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\mathrm{o}}(x_i, \varepsilon)$.

   Soit alors $E_\varepsilon$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, et $F_\varepsilon = E_\varepsilon \cap \mathcal{C}$.

   On a $x_1, x_2, \ldots, x_k \in F_\varepsilon$ ; pour tout $x \in \mathcal{C}$ il existe $i$ tel que $\|x - x_i\| < \varepsilon$ donc $\mathrm{d}(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$.

   (b) L'espace $E_\varepsilon$ est de dimension fini donc il est complet, c'est donc une partie complète de $\mathbf{E}$ donc un fermé. $F_\varepsilon$ est fermé comme intersection des fermés $F$ et $E_\varepsilon$.

   (c) $F_\varepsilon$ est fermé et convexe (intersection de deux convexes). Comme $F_\varepsilon$ est fermé inclus dans $K$ compact, $F_\varepsilon$ est convexe compact.

   $\pi_\varepsilon \circ f_{/F_\varepsilon}$ est une application continue de $F_\varepsilon$ dans lui même. $E_\varepsilon$ étant de dimension fini on peut appliquer le théorème de Brouwer : il existe $x_\varepsilon \in F_\varepsilon$ tel que :

$$\boxed{\pi_\varepsilon \circ f(x_\varepsilon) = x_\varepsilon}$$

Soit une suite de réels strictement positifs $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tendant vers 0 et avec les notation de la précédente sous-question, $u_n = x_{\varepsilon_n}$. Quitte à opérer une extraction on peut supposer, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, que la suite $(u_n)_{n\in N}$ converge vers $u \in K$.

Alors $\|f(u_n) - u_n\| = \|f(u_n) - \pi_{\varepsilon_n} \circ f(u_n)\| \leq \varepsilon_n$ tend vers 0. Comme $(f(u_n))$ tend vers $f(u)$ (continuité de $f$), on a à la limite $\|f(u) - u\| \leq 0$ donc $f(u) = u$.

On a ainsi établi que $\underline{f \text{ admet au moins un point fixe dans } K.}$