Ce problème est consacré à des questions d'approximation uniforme des fonctions sur un intervalle.

L'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ est noté $\mathcal{C}([a,b])$.

La transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est notée $M^\top$ et son rang est noté $\mathrm{rg}(M)$. L'espace vectoriel engendré par une partie A d'un espace vectoriel V est noté $Vect(A)$. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, on note $d(x,A) = \inf\{\|x-a\|, a \in A\}$ la distance d'un point $x \in E$ à une partie A de E.

Le problème est composé de quatre parties. Les trois premières parties sont indépendantes, et la quatrième utilise les résultats établis dans les parties précédentes. On attachera la plus grande importance au soin, à la clarté et à la précision de la rédaction.

Partie 1 : Déterminant de Cauchy

On fixe un entier $n \geq 1$ et $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ des nombres complexes tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tous $1 \leq i,j \leq n$. L'objet de cette partie est de calculer le déterminant de Cauchy

$$D_n = \det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Pour cela, on suppose dans un premier temps que les (a_i) sont distincts, de même que les (b_i), et on introduit la fraction rationnelle

$$F(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{X+b_1} & \frac{1}{X+b_2} & \cdots & \frac{1}{X+b_n} \end{vmatrix}$$

Remarque 1 *Dans l'énoncé initial, il est juste supposé que* $\forall 1 \leq i \leq n, a_i + b_i \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ tel que $F(X)$ s'écrive sous la forme
$$F(X) = \lambda \frac{(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_{n-1})}{(X+b_1)(X+b_2)\cdots(X+b_n)}.$$
2. On pose $G(X) = (X+b_n)F(X)$. Montrer que $G(-b_n) = D_{n-1}$ et en déduire une relation entre D_n et D_{n-1}.
3. Conclure que
$$D_n = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i+b_j)}$$
dans le cas où les (a_i) et les (b_i) sont distincts, puis dans le cas général.

Partie 2 : Matrices de Gram

Dans cette partie, on fixe un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$(qui munit donc E d'une structure d'espace préhilbertien). La norme associée est notée $\| \cdot \|$. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un n-uplet de vecteurs de E, on définit la *matrice de Gram* de $(x_1, \ldots, x_n)$ par

$$\mathrm{Gram}(x_1, \cdots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

On pose également $V = Vect(x_1, \cdots, x_n)$ et $m = \dim(V)$.

4. Soit $(e_1, \cdots, e_m)$ une base orthonormale de V et la matrice M de taille $m \times n$ définie par $M = (\langle e_i | x_j \rangle)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Gram}(x_1, \cdots, x_n) = M^\top M$.
   (b) Montrer que
   $$\mathrm{rg}(\mathrm{Gram}(x_1, \cdots, x_n)) = \dim V.$$
   (c) Montrer que toute valeur propre réelle de $M^\top M$ est positive ou nulle.
   (d) En déduire que $\det(\mathrm{Gram}(x_1, \cdots, x_n)) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille liée.
5. On suppose que la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre. Soit $x \in E$ et $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur V. Montrer que
   $$d(x, V) = \sqrt{\frac{\det(\mathrm{Gram}(x, x_1, \cdots, x_n))}{\det(\mathrm{Gram}(x_1, \cdots, x_n))}}.$$
   (On pourra considérer le déterminant $\det(\mathrm{Gram}(x - p(x), x_1, \cdots, x_n)))$

Partie 3 : Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

Dans cette partie on s'intéresse au théorème d'approximation de Weierstrass (1885) : *si $[a, b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, toute fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes.*

Pour tous $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq n$, on pose $B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Cette famille s'appelle la famille des *polynômes de Bernstein.* On note $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n.

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère une suite $(X_i)_{i=1,\cdots,n}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre x : $\mathbb{P}(X_i = 1) = x, \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - x$. On fixe $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ et on pose

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] \quad \text{où} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Pour $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, on définit son module de continuité ω par

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|, (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \delta\}$$

Remarque 2 *L'énoncé initial ne fait pas d'hypothèse sur δ, on considère que $\delta \geq 0$.*

6. Montrer que le module de continuité ω est un nombre réel bien défini et qu'il vérifie
   $$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0.$$

7. Montrer que pour tout $n \geq 0$, la famille $(B_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est une base de l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
8. Montrer que $B_n(f)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n que l'on exprimera en fonction des $B_{n,k}$.

   Remarque 3 *On ne peut pas assurer que le degré soit exactement n, comme le sous-entendait l'énoncé initial.*

9. Montrer que
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right)$$
   puis que
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$
   Pour $a < b$ deux nombres réels quelconques, considérons maintenant l'espace $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles, que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$ (on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'une norme). On fixe $f \in \mathcal{C}([a,b])$.
10. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un polynôme $T_n(f)$ tel que
$$\|f - T_n(f)\|_\infty = d(f, \mathcal{P}_n),$$
   où la distance est relative à la norme $\|\cdot\|_\infty$.
11. En utilisant les polynômes de Bernstein, montrer que $\|f - T_n(f)\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi nous avons établi le théorème de Weierstrass.
12. On suppose dans cette question que f est lipschitzienne. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout entier $n \geq 1$, $d(f, \mathcal{P}_n) \leq Cn^{-1/3}$.
13. Dans cette question, on se place sur $[a,b] = [-1,1]$ et on considère la fonction valeur absolue $V : x \mapsto V(x)$. On admettra l'inégalité suivante dite des frères Markov (1890) : *si P est un polynôme de degré au plus n, alors sur $[-1,1]$ on a $\|P'\|_\infty \leq n^2\|P\|_\infty$.*
    (a) Montrer qu'il existe un polynôme *pair* T_n^* tel que $d(V, \mathcal{P}_n) = \|V - T_n^*\|$.

    Remarque 4 *La norme n'est pas précisée. Il semble clair qu'il s'agit de la norme de la convergence uniforme.*

    (b) En minorant $|T_n^* - T_n^*(0) - V|$ sur un voisinage de 0, montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $d(V, \mathcal{P}_n) \geq cn^{-4}$.

Partie 4 : Théorème de Müntz

Remarque 5 *La numérotation dans le sujet initial est incohérente à partir d'ici.*

Pour $\alpha \geq 0$, on se permettra de noter simplement x^α la fonction définie sur $[0,1]$ par $x \mapsto x^\alpha$.

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant, dû à H. Müntz (1914) : *soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante de nombres réels, telle que $\lambda_0 = 0$ et V le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1])$ engendré par la famille de fonctions $x^{\lambda_n}, n \geq 0$. Alors V est dense dans $(\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.*

Dans la suite, on fixe $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante de nombres réels, telle que $\lambda_0 = 0$.

14. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on pose

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Vérifier que $\|\cdot\|_2$ définit une norme sur $\mathcal{C}([0,1])$ associée à un produit scalaire que l'on explicitera et que l'on pourra noter $\langle\cdot|\cdot\rangle$ dans la suite.

15. Montrer que $Vect(\{x^m, m \in \mathbb{N}\})$ est dense dans $(\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_2)$.

16. Pour $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ comme ci-dessus, démontrer que la famille de fonctions (x^{λ_n}) est libre dans $\mathcal{C}([0,1])$ (on pourra utiliser la question 4).

17. Soit $V_N = Vect(x^{\lambda_n}, 0 \leq n \leq N)$ et m un réel positif.

(a) Montrer que

$$d_2(x^m, V_N) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=0}^{N} \frac{|\lambda_i - m|}{|\lambda_i + m + 1|},$$

où d_2 désigne la distance associée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{C}([0,1])$.

(b) Montrer que si la suite (λ_n) est bornée alors $\lim\limits_{N\to\infty} d_2(x^m, V_N) = 0$.

(c) Montrer que si (λ_n) est non-bornée et $m \notin \{\lambda_n, n \geq 0\}$ alors

$$\lim_{N\to\infty} d_2(x^m, V_N) = 0 \text{ si et seulement si } \sum_{\mathrm{n}\geq 1} \frac{1}{\lambda_{\mathrm{n}}} \text{ diverge.}$$

18. Montrer que V est dense dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_2)$ si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

19. Montrer que si V est dense dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

(a) Prouver que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a

$$\|f - g\|_\infty \leq |f(0) - g(0)| + \|f' - g'\|_2.$$

(b) Conclure que si la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge, alors V est dense dans $(\mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

(c) Le théorème de Müntz reste-t-il vrai si on l'omet l'hypothèse $\lambda_0 = 0$?