correction du DM n°6

Partie I

On convient que det **désigne le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, (le texte a omis cet précision).**

I.A Comme une application linéaire est de classe C^1, de différentielle égale en tout point Ã l'application elle-mÃªme, f, somme d'une application linéaire et d'une constante, est de classe C^1 et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$J_f(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f(x)) = A.$$

Par $\mathcal{B}_c$ est désignée la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

I.B 1) φ est la composée de g est d'une application linéaire toutes deux de classe C^1, donc est de classe C^1 et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = \mathrm{d}g(ta)\cdot a = \sum_{j=1}^{n} \partial_j g(ta) a_j.$$

2) Comme en particulier φ est dérivable en 0, $\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \underset{t\to 0}{o}(t)$ soit :

$$g(ta) = g(0) + t\sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j g(0) + \underset{t\to 0}{o}(t).$$

I.C 1) On a $t_j = te_j$ où e_j désigne le j^{e} vecteur de la base canonique. En utilisant le I.B.2 :

$$f_i(t_j) = f_i(te_j) = 0 + t\partial_j f_i(0) + o(t),$$

Par n-linéarité du déterminant on déduit :

$$\det(f(t_1), ..., f(t_n)) = t^n \det(\partial_1 f(0)+o(1), ..., \partial_n f(0)+o(1)) = t^n(\mathrm{jac}_f(0)+o(1)) = t^n \mathrm{jac}_f(0)+o(t^n),$$

par continuité du déterminant.

2) Puisque $\det(t_1, ..., t_n) = t^n \det(e_1, ..., e_n) = t^n$ on a bien $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\det(f(t_1), ..., f(t_n))}{\det(t_1, ..., t_n)} = \mathrm{jac}_f(0)$.

3) Pour $n = 2$, $|\mathrm{jac}_f(0)| = |\det(\partial_1 f(0), \partial_2 f(0))|$ est égal à l'aire du parallélogramme de sommets $(0,0)$, $\partial_1 f(0)$, $\partial_2 f(0)$ et $\partial_1 f(0) + \partial_2 f(0)$.
Pour $n = 3$, $|\mathrm{jac}_f(0)| = |\det(\partial_1 f(0), \partial_2 f(0), \partial_3 f(0))|$ est égal au volume du parallélépipède de sommets $(0,0)$, $\partial_1 f(0)$, $\partial_2 f(0)$, $\partial_3 f(0)$, $\partial_1 f(0) + \partial_2 f(0)$, $\partial_1 f(0) + \partial_3 f(0)$, $\partial_2 f(0) + \partial_3 f(0)$ et $\partial_1 f(0) + \partial_2 f(0) + \partial_3 f(0)$.

Partie II

II.A D'après le I.A. on a $\mathrm{jac}_f(x) = A$ donc $\mathrm{div}_f(x) = \mathrm{tr}(A)$.

II.B 1) Pourtout réel t,

$$u_a(t) = \exp(tA)a = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} a = (a_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, a_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t})^\top.$$

2) $\det(u_a(t), u_b(t)) = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathrm{e}^{\lambda_1 t + \lambda_2 t} = \det(a,b)\mathrm{e}^{t\mathrm{div}_f(a)}$ puisque $\mathrm{div}_f(x) = \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.
De plus on a bien $\det(u_a(0)|u_b(0)) = \det(a|b)$ puisque $u_a(0) = a$ et $u_b(0) = b$.

3) Le parallélogramme de sommets $(0,0)$, $u_a(t)$, $u_b(t)$ et $u_a(t) + u_b(t)$ a pour aire:
$|\det(u_a(t), u_b(t))| = |\det(a,b)|\mathrm{e}^{t\mathrm{div}_f(a)}$. Donc :

– si $\mathrm{div}_f(a) > 0$ alors $t \mapsto |\det(u_a(t), u_b(t))|$ est une fonction croissante ;
– si $\mathrm{div}_f(a) < 0$ alors $t \mapsto |\det(u_a(t), u_b(t))|$ est une fonction décroissante ;
– si $\mathrm{div}_f(a) = 0$ alors $t \mapsto |\det(u_a(t), u_b(t))|$ est une fonction constante.

II.C 1) $x_2(t) = a_2 \left(\dfrac{x_1(t)}{a_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$ puisque a_1 et λ_1 sont non nuls. On a donc $x_2(t) = \theta_a(x_1(t))$ avec $\theta_a(x) = a_2 \left(\dfrac{x}{a_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$.

2) a) $\theta_a(x) = \dfrac{x^2}{4}$, $\theta_b(x) = 2x^2$ et $\theta_{a+b}(x) = \dfrac{x^2}{3}$.

b) $\theta_a(x) = \dfrac{4}{x^2}$, $\theta_b(x) = \dfrac{2}{x^2}$ et $\theta_{a+b}(x) = \dfrac{27}{x^2}$.

c) $\theta_a(x) = \theta_b(x) = \dfrac{2}{x}$ et $\theta_{a+b}(x) = \dfrac{9}{x}$.

II.D 1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme λI_2 commute avec toute matrice,

$$u_a(t) = \exp(tA)a = \exp(\lambda t I_2)\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)a = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(I_2 + t\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)a = (\mathrm{e}^{\lambda_t} a_1 + a_2 t\mu, a_2 \mathrm{e}^{\lambda t})^\top,$$

car $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre 2

Donc $\det(u_a(t), u_b(t)) = ((a_1+\mu a_2 t)b_2 - a_2(b_1+\mu b_2 t))\mathrm{e}^{2\lambda t} = \det(a,b)\mathrm{e}^{t\mathrm{div}_f(a)}$ puisque $\mathrm{div}_f(x) = \mathrm{tr}(A) = 2\lambda$.

Variante. Notons g l'application linéaire qui envoie la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sur (a,b), alors :

$$\det(u_a(t), u_b(t)) = \det(\exp(tA)a, \exp(tA)b) = \det(exp(tA) \circ g\mathrm{e}^{2\lambda}\det(a,b) = \det(a,b)\mathrm{e}^{t\mathrm{div}_f(a)}$$

2) Si A a un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$, elle est soit diagonalisable et donc semblable à la matrice du II.B, soit non diagonalisable et semblable à la matrice triangulaire du II.D.1, dans le premier cas Le spectre de $\exp(A)$ est $\{\mathrm{e}^{\lambda_1}, \mathrm{e}^{\lambda_1}\}$ et $\{\mathrm{e}^{\lambda}\}$, avec une valeur propre double dans le second, dans tous les cas, le déterminant de $\exp(A)$ est $\mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$, **résultat officiel du programme**. On a donc :

$$\det(u_a(t), u_b(t)) = \det(exp(tA) \circ g\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}\det(a,b) = \det(a,b)\mathrm{e}^{t\mathrm{div}_f(a)}$$

3) Si le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, le résultat demeure, la trigonalisation dans $\mathbb{C}$ étant possible.

Partie III

Soit un couple (i,j) d'éléments de $\{1, ..., n\}$.

III.A Comme f est de classe C^2, f_k l'est aussi et on peut lui appliquer le théorème de Schwarz: $f_{i,j,k} = \partial_{i,j} f_k = \partial_{j,i} f_k = f_{j,i,k}$.

III.B 1) pour tout $k \in \{1, ..., n\}$
Puisque J_f est Ã valeur dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\partial_j f_i = -\partial_i f_j$ donc :

$$f_{i,j,k} = \partial_i \partial_j f_k = -\partial_i \partial_k f_j = -f_{i,k,j}.$$

2) Por tout $k \in \{1, ..., n\}$, on a $f_{i,j,k} = f_{j,i,k}$ et $f_{i,k,j} = -f_{i,j,k}$, et donc $f_{i,j,k} = -f_{i,k,j} = -f_{k,i,j} = f_{k,j,i} = f_{j,k,i} = -f_{j,i,k} = -f_{i,j,k}$, et finalement l'application $f_{i,j,k}$ est nulle.
Les dérivée partielles de tout les coefficiant de J_f étant nulle sur $\mathbb{R}^n$ qui est connexe par arcs, J_f ets constante ; notons A sa valeur et posons $g(x) = f(x) - Ax$. On a $\mathrm{d}d = \mathrm{d}f - A = 0_{\mathbb{R}^n \to \updownarrow(\mathbb{R}^n)}$.
Donc la fonction g est constante (connexité par arcs ded $\mathbb{R}^n$). Donc

$$f \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \;;\; x \mapsto Ax + b,$$

où A est antisymétrique.

4) On vient de montrer que si $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout x alors on a $f : x \mapsto Ax + B$ avec A antisymétrique. Réciproquement, si $f(x) = Ax + B$ avec A antisymétrique, alors par le I.A, $J_f(x) = A$ pour tout x et est donc antisymétrique.

III.C Supposons que pour tout i on ait $f_i = \partial_i g$ avec g de classe C^2, f est de classe C^1 et vérifie $\partial_j f_i = \partial_{j,i} g = \partial_{i,j} g = \partial_i f_j$ par le théorème de Schwarz. $J_f(x)$ est donc une matrice symétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Réciproquement supposons que $J_f(x)$ soit une matrice symétrique pour tout x. Définissons

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} ; \; x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k \int_0^1 f_k(tx) dt.$$

Pour montrer que g est de classe C^1 on utilise un théorème du chapitre prochain.

Soit $i \in \{1, ..., n\}$. Le théorème assure l'existence de dérivée partielle pour g données par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, ; \partial_i g(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (x_k \mapsto x_k f_k(tx))' dt.$$

Donc pour tot x élément de $\mathbb{R}^n$,

$$\partial_i g(x) = \int_0^1 f_i(tx) dt + \sum_{k=1}^{n} x_k \int_0^1 t \partial_i f_k(tx) dt = \int_0^1 \left(f_i(tx) + t \sum_{k=1}^{n} x_k \partial_k f_i(tx) \right) dt$$

puisque $J_f(x)$ est une matrice symétrique pour tout x. Puique la dérivée de $t \to t f_i(tx)$ est égale à $f_i(tx) + t\partial \sum_{k=1}^{n} x_k \partial_k f_i(tx)$ on déduit que $\partial_i g(x) = [t f_i(tx)]_0^1 = f_i(x)$.

Enfin g est bien de classe C^2 puisque f est de classe C^1.

Partie IV

IV.A 1) Puisque J_f està valeur dans le groupe orthogonal $J_f^\top J_f$ vaut constamment I_n donc pour tout couple (i, j):

$\sum_{p=1}^{n} \partial_i f_p \partial_j f_p = \delta_{i,j}$. En dérivant par rapport à x_k on obtient, pour tout triplet (i, j, k) d'éléments de $\{1, ..., n\}$,

$$0 = \sum_{p=1}^{n} \partial_{k,i} f_p \partial_j f_p + \sum_{p=1}^{n} \partial_i f_p \partial_{k,j} f_p,$$

ou encore

$$\alpha_{j,k,i} = -\alpha_{i,k,j}$$

. Si on échange le premier et le troisième indice on change le signe.

Comme f est de classe C^2, le théorème de Schwarz donne, pour tout triplet (i, j, k),

$$\alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j},$$

on a donc bien

$$\alpha_{i,k,j} = \alpha_{i,j,k} = -\alpha_{k,j,i}.$$

2) Soit untriplet (i, j, k) d'éléments de $\{1, ..., n\}$. Puisque $\alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}$, une permutation circulaire sur les indices change le signe. On a donc $\alpha_{i,j,k} = -\alpha_{j,k,i} = \alpha_{k,i,j} = -\alpha_{i,j,k}$. On a bien $\alpha_{i,j,k} = 0$ pour tout triplet (i, j, k).

3) Pour tout $(i, j, k) \in (\{1, ..., n\})^3$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$0 = \alpha_{i,k,j} = \left(J_f(x)^\top \partial_k (J_f)(x) \right)_{i,j},$$

donc l'inversibilité de $J_f(x)^\top$ (c'est une matrice orthogonale) dit :

$$\forall k \in \{, ..., n\} ; \partial_k (J_f) = O_n.$$

Donc par connexité par arcs de $\mathbb{R}^n$, J_f et constante, notons A l'élément de O_n qui est sa valeur. Le même raisonnement qu'au III.B.3 donne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n ; \; x \mapsto Ax + b$.

IV.B On vient de montrer que si $(\mathcal{P})$ alors $f = A \times \cdot + b$ avec A orthogonale.

Réciproquement, si $f = A \times \cdot + b$ avec A orthogonale, alors par I.A, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $J_f(x) = A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Il y a donc bien équivalence.