À propos d'un exercice du cours

Reprenons l'exercice du cours sur la stabilité du système

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = AY.$$

Nous utilserons pour simplifier la décomposition de Dundford, le temps perdu à l'établir est compensssé par la simplicité de la preuve qui en résulte.

La matrice A s'écrit, puisque χ_A est scindé sur le corps $\mathbf{C}$,

$$A = P\mathrm{diag}(A_1, ..., A_k)P^{-1},$$

où k est le nombre de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_k$ distinctes, P un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, et pour $i = 1, ..., k$ $A_i = I_{m_1} + N_i$ avec m_i la multiplicité de λ_i et N_i une matrice triangulaire supérieure stricte.

Posons $N = P\mathrm{diag}(N_1, ..., N_k)P^{-1}$ et $D = P\mathrm{diag}(I_{m_1}, ..., I_{m_k})P^{-1}$. On vérifie alors sans mal, en utilisant des produits par blocs que :

— $A = D + N$;
— $AN = NA$;
— N est nilpotente.

Voit TD.

La solutionsur $\mathbf{R}$ notée Φ_{X_0} du problème de Cauchy $\{$ (12), $Y(0) = X_0$ vaut :

$$\Phi_{X_0} \ : \ \mathbf{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})\,;\ t \mapsto \exp(tA)X_0.$$

• Supposons que les parties réelles des valeurs propres soient toutes négatives.

On note $\alpha := \min\{|\mathrm{Re}(\lambda_1)|, ..., |\mathrm{Re}(\lambda_k)|\}$

Comme N et D commutent, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $\Phi_{X_0} = \exp(tD)\exp(tN)X_0$. Notons $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.

Alors $|\!|\!|\exp(t\mathrm{diag}(I_{m_1}, ..., I_{m_k}))|\!|\!| \leq \exp(-\alpha t)$, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$.

Par ailleurs $\exp(tN) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}N^k$, puisque l'ordre de nilpotence des N_i est inférieur à m_i donc à n.

De ces deux points, comme $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ est une norme d'algèbre, vient :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*,\ |\!|\!|\exp(tA)|\!|\!| \leq |\!|\!|P|\!|\!| |\!|\!|P^{-1}|\!|\!| \exp(-\alpha t) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} t^k |\!|\!|N|\!|\!|^k$$

Posons $A = |\!|\!|N|\!|\!| + 1$ et $B = |\!|\!|P|\!|\!| |\!|\!|P^{-1}|\!|\!|$, alors pour tout réel $t \geq 0$ on a

$$|\!|\!|\exp(tA)|\!|\!| \leq B\exp(-\alpha t) n(1+t)^n A^n$$

Donc $t \mapsto |\!|\!|\exp(tA)|\!|\!|$ est bornée sur $\mathbf{R}_+$ car continue et de limite nulle en 0.

Donc Φ_{X_0} est bornée sur $\mathbf{R}_+$ et tend vers 0 en $+\infty$, puisque pour tout réel $t \geq 0$.

$$\|\Phi_{X_0}(t)\|_\infty \leq |\!|\!|\exp(tA)|\!|\!|\,\|X_0\|_\infty.$$

• Supposons qu'une valeur propre soit de partie réelle positives.

Prenons quitte à réindexer les valeurs propres $\lambda_1 \geq 0$, et choisisson V_1 un vecteur propre associé. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout t réel ,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}(tA)^k V_1 = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} t^k \lambda_1^k V_1$$

par continuité de la multiplication par V_1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, vient :

$$\Phi_{V_1}(t) = \exp(t\lambda_1)V_1$$

puis

$$\|\Phi_{V_1}(t)\|_\infty = \exp(t\mathrm{Re}\lambda_1)\|V_1\|_\infty.$$

Comme V_1, vecteur propre est non nul, $\Phi_{V_1}(t)$ ne tend pas vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.