Ce très court DM est là pour attendre que de nouvelles notions soient traitées. Il utilise essentiellement des connaissances et des raisonnements de sup. Il est à rendre pour le 17 septembre.

DM n°2

Exercice 1

On étudie dans cet exercices quelques aspects d'une marche aléatoire symétrique en dimension 1. Une marche aléatoire symétrique en dimension 1 modélise les dépalcements successifs d'un point matériel sur une droite qui se font dans un sens ou dans l'autre avec la même probabilité.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes qui suivent la loi de Rademacher, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ [1]. On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Rademacher si elle prend comme valeurs 1 et -1 avec la même probabilité, autrement dit si elle suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$

On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

1. **Écart à l'origine**

   On se donne un réel ε strictement positif.

   l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire X s'obtient en appliquant l'inégalité de Markov à $(X-\mathrm{E}(X))^2$, qui est bien une variable positive. Nous allons comparer ce que nous fournit l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à ce que l'on obtient en appliqueant l'inégalité de Markov à $(\exp(t(X-\mathrm{E}(x)))$, alternative très classique à l'inégalité.

   (a) Calculer pour tout entier naturel $n \geq 1$ l'espérance et la variance de S_n.

   (b) En utilisant la formule de Bienaymé-Tchebychev, majorer pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right)$.

   Donner un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1}\right) \geq 0,99$.

   (c) **3/2** Montrer que pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge de somme e^x.

   On pourra consulter les fiches de colles de MPSI.

   (d) En déduire que pour tout réel t, $\mathrm{ch}(t) \leq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$.

   (e) Déduire de la question précédente que pour tout réel t et tout entier $n \geq 1$,

   $$\mathrm{E}(\exp(tX_1)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$

   puis que :

   $$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

1. Les 3/2 ne se préoccuperons pas de ce qu'est un espace probabilisé.

(f) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tout réel t $\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n} - t\varepsilon\right)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).$$

(g) Montrer que :

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).$$

Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1}\right) \geq 0,99$.

2. **Loi de S_n**

(a) Pour tout entier $n \geq 1$ on définit les varaibles aléatoires

$$X_n^* := \frac{X_n + 1}{2}\ ;\ S_n^* = X_1^* + X_2^* + ... + X_n^*.$$

Déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la loi de X_n^* et de S_n^*.

(b) En déduire la loi de S_n.

3. **Retour à l'Origine.**

On convient que S_0 est la variable aléatoire presque sûrement nulle. On considère par ailleurs la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$,

$$N = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{S_n=0}.$$

On convient évidemment dans la définition de N que La somme d'une série à termes positifs divergente vaut $+\infty$ et on rappelle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{S_n=0} = \begin{cases} 1 \text{ si } S_n(\omega) = 0, \\ 0 \text{ sinon } . \end{cases}$

On définit également la variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbf{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ par :

$$T = \min\{n \in \mathbf{N}^* | S_n = 0\},$$

avec la convention que pour toute partie A de $\mathbf{N}$, $\min(A)$ désine le plus petit élément de A ou $+\infty$, selon que A soit non vide ou vide. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on notera $p_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$, et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n = \mathbf{P}(T = n)$

(a) Que représente les variables aléatoires N et T ?

Exprimer l'événement $\{N \neq 0\}$ au moyen des événements $\{S_k = 0\}$, $k \in \mathbf{N}^*$.

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ exprimer au moyen des événements $\{S_k = 0\}$, $k \in \mathbf{N}^*$, l'événement E_n défini par :

$$E_n = \{\omega \in \Omega | S_n(\omega) = 0 \text{ et } \forall k \in]\!]n, +\infty[\![, S_k(\omega) \neq 0\}.$$

Interpréter l'événement E_n.

(c) Exprimer l'événement $\{N < +\infty\}$ au moyen des E_n, $n \in \mathbf{N}$

(d) En déduire que :

$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_1 + X_2 + ... X_k \neq 0).$$

(e) On admet que la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge. Déterminer $\mathbf{P}(N = +\infty)$.

(f) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge.

On pourra utiliser la formule de Stirling.

4. **Temps de premier retour**

(a) Calculer explicitement f_2 et f_4.

Soient les séries entières :

$$\sum_{n\geq 0} p_n t^n \quad \text{et} \sum_{n\geq 1} f_n t^n,$$

leurs sommes seront respectivement notées S et F.

(b) Soit $m \in \mathbf{N}^*$, montrer que :

$$p_m = \mathbf{P}\{S_m = 0\} = \sum_{k=1,2\ldots,m} f_k p_{m-k}.$$

La suite de l'exercice est réservée au 5/2

(c) Pour tout $t \in]-1,1[$ comparer $S(t)$ et $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

(d) Établir, pour tout $t \in]-1,1[$, la relation

$$S(t) = 1 + S(t)F(t).$$

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de f_n.

(e) Donner un équivalent de $f(2k)$ quand $k \to +\infty$.

(f) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge, puis en déduire sa valeur. Interpréter.

Exercice 2

Pour tout entier n er supérieur ou égal à 2 on définit le polynôme

$$P_n = X^n - X + 1.$$

1. Soit n un entier pair non nul. Montrer que P_n' admet une et une seule racine réelle, on la notera x_n. Montrer que P_n n'admet pas de racine réelle.
2. Soit n un entier est impair distinct de 1. Montrer que P_n' admet deux et seulement deux racines réelles, oposées, $\pm x_n$. Montrer que P_n admet une et une seule racine racine réelle. Donner un intervalle de longueur inférieure ou égale à 1 qui contient la racine réelle de P_n.

Pour tout entier m supérieur ou égal à 2, on pose z_m la racine réelle de P_{m+1} et $h_n := -1 - z_n$ de sorte à ce que $z_n = -1 - h_n$

3. Montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\to} -1$, puis déterminer un équivalent de h_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. Posons $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n-1}}$. Expliciter les racines complexes de P_n' au moyen de x_n et ω. Puis montrer que les n racines complexes de P_n sont simples.
5. On note r_1, r_2, r_3 les trois racines de P_3 et l'on pose :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + r_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + r_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + r_3 \end{vmatrix}.$$

Montrer que $\Delta = -2$.

6. Soient n en entier supérieur ou égal à 2 et $r_1, r_2, ...r_n$ les n racines complexes de P_n. Calculer le déterminant Δ_n, où :

$$\begin{vmatrix} 1+r_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+r_n \end{vmatrix}.$$

Indications pour le DM n°2

Exercice 1

1. **Écart à l'origine**

(a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ En premier lieux $\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}(-1) = 0$ et $\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{E}(X_1^2) - E(X_1)^2 = \mathrm{E}(1) - 0^2 = 1$.

Utilisez ensuite la linéarité de l'espérance puis la mutuelle indépendance...

(b) Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1}\right) \geq 1 - 10^{-2} = 0,99.$$

(c) Soit $x \in \mathbf{R}$.

Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, sa dérivée $(n+1)^{\mathrm{e}}$ — qui est elle-même — est majoré sur $[0, x]$ par $\exp(|x|)$, par croissance de l'exponentielle, (l'écriture $[0, x]$ ne présage pas que x soit positif), l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \text{ et } |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|x|)$$

etc. Soit $t \in \mathbf{R}$. Par ce qui précède,

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!},$$

$$\mathrm{ch}(t) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Il reste à comparer les termes des deux séries.

(d) Soient un réel t et un entier $n \geq 1$, Par la formule du transfert,

$$\underline{\mathrm{E}(\exp(tX_1)) = \frac{1}{2}\exp(t \times 1) + \frac{1}{2}\exp(t \times (-1) = \mathrm{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)}.$$

Le lemme de coalition fait que $\exp\left(\frac{tX_1}{n}\right)$,...,$\exp\left(\frac{tX_n}{n}\right))$ héritent de la mutuelle indépendance de X_1,...,X_n, donc

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\right) = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right) \underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right) =$$

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{tX_1}{n}\right)\right)^n \leq .....$$

(e) Soit un entier $n \geq 1$. La variable aléatoire $\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)$ est **positive** l'inégalité de Markov s'applique.....

Reste à optimiser en t : pour $t = \frac{\varepsilon n}{2}$, l'inégalité précédente devient........

(f) D'abord, $\left\{\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right\} = \left\{\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right\} \cup \left\{-\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right\}$

Mais comme les variables aléatoires $-X_1$,...,$-X_n$ suivent la même loi respectivement que X_1,...X_n et restent mutuelllement indépendantes (lemme de coalition) $-S_n$ suit la loi de S_n.....

Pour la fin $n \geq 1060$ convient.

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1}\right) \geq 0,99.,$$

2. **Loi de S_n**

(a) $\boxed{X_n^* \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$ et Le lemme de coalition assurant la mutuelle indépendance de X_1^*,X_2^*,...X_n^*, $\boxed{S_n^* \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}$.

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = 2S_n^* - n$, donc $S_n(\Omega) = \{2k - n, k \in [\![-n;n]\!]\}$ et pour tout $k \in [\![-n;n]$,

$$\boxed{\mathbf{P}(S_n = 2k - n) = ...}$$

Remarque. *S_n ne prend que des valeurs de la parité de n.*

3. **Retour à l'Origine.**

(a) Soit $\omega \in \Omega$. Alors $N(\omega)$ représente le nombre (éventuellement infini) de termes nuls de la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbf{N}^*}$, (nombre de « retours à l'origine »).

On a $N(\omega) \neq 0$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tels que $S_k(\omega) = 0$; donc :

$$\boxed{\{N \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \{S_k = 0\}.}$$

Remarque. A l'opposé, $N(\omega) = +\infty$ si pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il existe un entier k supérieur ou égal à n tel que $S_k(\omega) = 0$; donc :

$$\boxed{\{N = +\infty\} = ...}$$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$E_n = \{S_n = 0\} \cap \bigcup_{k\geq n+1} \overline{\{S_k = 0\}}.$$

L'événement E_n est « la suite $(S_k)_{k\in\mathbf{N}}$ prend la la valeur 0 pour $k = n$ et pour aucun autre indice strictement plus grand » de manière imagée, n est ......

(c) On a donc

$$\boxed{\{N < +\infty\} = \underset{n\in\mathbf{N}^*}{?} E_n,}$$

.

(d) En modifiant légèrement l'expression des E_n,

$$\{N < +\infty\} = \biguplus_{n=0}^{+\infty}\{S_n = 0, \forall p \in [\![n+1, +\infty[\![S_p - S_n \neq 0\} =$$

$$\biguplus_{n=0}^{+\infty}\{S_n = 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + ... + X_{n+k} \neq 0\}.$$

Donc

$$\mathbf{P}(N<+\infty)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(S_n=0,\forall k\in\mathbf{N}^*,X_{n+1}+X_{n+2}+...+X_{n+k}\neq 0).$$

Puis, comme le lemme de coalition assure l'indépendance[2] de S_n et $X_{n+1}+X_{n+2}+ ... +X_{n+k}$, pour tout $n\in\mathbf{N}$, etc.

(e) On a donc :

$$1\geq \mathbf{P}(N<+\infty)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha\mathbf{P}(S_n=0),$$

La série $\sum\mathbf{P}(S_n=0)$, on l'admet, diverge, donc nécessairement $\alpha=0$ et donc on a $\mathbf{P}(N<+\infty)=0$. Donc :

$$\boxed{\mathbf{P}(N=+\infty)=1.}$$

(f) D'après 2, $\mathbf{P}(S_{2p+1}=0)$ est nulle tandis que $\mathbf{P}(S_{2p}=0)=\mathbf{P}(S_{2p}^*=p)=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\underset{.\to+\infty}{\sim}$ .... (merci Stirling). Donc la série $\sum\mathbf{P}(S_{2p}=0)$ diverge, mais pour tout $n\in\mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n}\mathbf{P}(S_k=0)=\sum_{p=0}^{n}\mathbf{P}(S_{2p}=0)$$

mais comme $\sum\mathbf{P}(S_{2p}=0)$ est une série positive divergente $\sum_{p=0}^{n}\mathbf{P}(S_{2p}=0)\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$.

Donc $\underline{\sum\mathbf{P}(S_n=0)\text{ diverge }}$(la suite de ses sommes partielles d'indice pair diverge).

4. (a) Comme

$$\{T=2\}=(\{X_1=1\}\cap\{X_2=-1\})\amalg(\{X_1=-1\}\cap\{X_2=+1\}),$$

par indépendance de X_1 et X_2,

$$f_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Sur le même principe,

$$\{T=4\}=\coprod_{\epsilon\in\{1,-1\}}(\{X_1=\epsilon\}\cap\{X_2=\epsilon\}\cap\{X_3=-\epsilon\}\cap\{X_4=-\epsilon\}$$

et donc

$$f_2=...........$$

(b) Soit $m\in\mathbf{N}^*$. *Il est peut-être plus simple de calculer sans se soucier de la parité de m, ni des autres indices.*

On a l'inclusion $\{S_m=0\}\subset\coprod_{k=1,2...,m}\{T=k\}$, donc

$$\{S_m=0\}=\coprod_{k=1,2...,n}(\{T=k\}\cap\{S_m=0\}).$$

2. En toute rigeur il faudrait travailler un peu plus pour prendre encomte la présence du « pour tout k », ce qui exigerait que l'on connût des résultats de spé. En général du reste dans la littérature, on se contente de cette évocation de l'indépendance.

Donc en passant aux probabilités,

$$p_m = \mathbf{P}\{S_m = 0\} = \sum_{k=1,2...,m} \mathbf{P}(\{T = k\} \cap \{S_m = 0\}).$$

Distinguons pour plus de clarté les cas $k \neq m$ et $k = m$.

• Pour $k = 1, 2, ..., m - 1$,

$$\{T = k\} \cap \{S_m = 0\} = (\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{\{S_i = 0\}} \cap \{S_k = 0\}) \cap \{X_{k+1} + X_{k+2} + ... + X_m = 0\}.$$

Or par coalition $(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{\{S_i = 0\}} \cap \{S_k = 0\})$ et $\{X_{k+1} + X_{k+2} + ... + X_m = 0\}$ sont indépendants, donc etc.,etc., etc...

• $\{T = m\} \cap \{S_m = 0\} = \{T = m\}$ donc

$$\mathbf{P}(\{T = m\} \cap \{S_m = 0\}) = f_m = f_m p_{m-m}.$$

Finalement

$$\underline{p_m = \mathbf{P}\{S_m = 0\} = \sum_{k=1,2,...,m} \mathbf{P}(T = k)\mathbf{P}(S_{m-k}) = \sum_{k=1,2...,m} f_k p_{m-k}.}$$

(c) D'après le cours, pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right) .... \left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!}(-1)^k(t^2)^k$$

....

$$= .... = S(t).$$

(d) D'après (b), pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$S(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1,2,...,n} f_k p_{n-k} \right) t^n = 1 + F(t)S(t),$$

par produit de Cauchy, la série entière $\sum p_n t^n$ — nous le vîmes en (c) — a un rayon de convergence égal à 1 et $\sum\limits_{n\geq 1} f_n t^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1, puisque $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge par σ-additivité de $\mathbf{P}$, de somme : $1 - \mathbf{P}(T = \infty)$.

Il en résulte que pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$F(t) = 1 - \frac{1}{S(t)} = 1 - \sqrt{1-t^2}$$

Pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1-t^2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-t^2)^k,$$

Donc.......

— pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f_{2k} = \frac{(2(k-1))!}{(2^k k! 2^{k-1}(k-1)!)}$;

— pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f_{2k+1} = 0$.

(e) Grâce à la formule de Stirling,

$$f_{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}$$

(f) Utiliser le théorème de la double limite Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = 1$.

La variable aléatoire T est presque sûrement à valeurs dans $\mathbf{N}$ et donc $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ s'annule presque sûrement.

Exercice 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on pose $x_n = {}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{n-1}}$. Notons que comme $n \geq 2$,

$$0 < x_n < 1.$$

1. Cas pair

Comme $P' - n = nX^{n-1} - 1$ on a le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		x_n		$+\infty$
$P_n'(x)$		$+$	0	$+$	
$P_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$P_n(x_n)$	$\nearrow$	$+\infty$

Or $nx_n^{n-1} = 1$ donc $P_n(x_n) = \frac{1}{n}x_n - x_n + 1 = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n > 1 - 1 \times 1 = 0$.
Le polynôme P_n n'a pas de racine réelle.

2. Cas impair

Par parité de $n-1$, on obtient le tableau de variations

x	$-\infty$		$-x_n$		x_n		$+\infty$
$P_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

On a, comme dans le cas n pair, $P_n(x_n) > 0$, par ailleurs la restriction du polynôme P_n à $]-\infty, -x_n]$ est **continue** sur cet **intervalle** et **strictement croissant** donc par le théorème de la bijection monotone réalise une bijection sur $]-\infty, P_n(-x_n)]$. Conclusions : P_n admet une et une seule racine racine réelle.

Notons que $P_n(-1) = 1 > 0$ et $P_n(-2) = (-2)^n + 2 + 1 = -2^n + 3 \leq -2^3 + 3 = -5 < 0$. Donc la racine de P_n est élément de $]-2, -1[$.

3. Par définition de z_n, pour tout entier $n \geq 1$

$$(-z_n)^{2n+1} = -(z_n)^{2n+1} = -z_n + 1,$$

Passer au logarithme! On trouvee $h_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Puis

$$\underline{h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{2n+1}}.$$

On a le développement asymptotique : $z_n = -1 - \frac{\ln(2)}{2n+1} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$.

4. Soit $z \in \mathbf{C}$. On a $P_n'(z) = 0$ si et seulement si : $z^{n-1} = \frac{1}{n} = x^{n-1}$ soit encore, si et seulement si $\frac{z}{x_n} \in \mathbf{U}_{n-1}$. Or $\mathbf{U}_{n-1} = \{........\}$, donc l'ensemble des racines de P_n' est :

$$\underline{\{...........\}}$$

Pour $k = 0, 1, ..., n-2$,on montre que : $P_n(x_n\omega^k) \neq 0$.
Donc les n racines complexes de P_n sont simples.

5. Notons, E_i pour $i = 1, 2, 3$, le i^{e} vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C})$ et $C = E_1 + E_2 + E_3$.
On note r_1, r_2, r_3 les trois racines de P_3 et l'on pose :

$$\Delta = \det(\ C + r_1 E_1 \ \big|\ C + r_2 E_2 \ \big|\ C + r_3 E_3\ ).$$

En utilisant la linéarité par rapport au trois colonnes, Δ s'exprime comme la somme de 2^3 déterminants, parmi ceux-ci tout déterminant ayant deux colonnes C est nul, en utilisant ensuite que $C = E_1 + E_2 + E_3$, on a sans presque de calculs que

$$\Delta = r_1 r_2 r_3 + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) = (-1) + (-1) = \underline{-2},$$

grâce aux relations coefficients/racines pour le polynôme unitaire P_n.

6. Notons E_i le i^{e} vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ et $C = E_1 + E_2 + E_3$.
En raisonant comme dans la question précédente, on arrive à

$$\Delta_n = \underline{(-1)^n 2}.$$