I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A - L'opérateur de translation

I.A.1) :

$$\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \text{cd}(\tau(P)) = \text{cd}(P)$$

I.A.2)

$$\forall k \in \mathbb{N}, \tau(P)(X) = P(X + k)$$

I.A.3) M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient donc

$$\forall i, j \in [1, n], (M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

I.A.4) La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$.

Comme M et τ ont les mêmes valeurs propres,

$$\text{Sp}(\tau) = \{1\}$$

Si M était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à la matrice unité.

Ainsi,

$$M \text{ et } \tau \text{ ne sont pas diagonalisable}$$

I.A.5) Introduire $\bar{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X - 1)$,

⋮

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \tau(P)(X) = P(X + k)$$

I.A.6) Avec l'expression de τ^{-1} , on applique la même méthode qu'en 3) et on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1}, \tau^{-1}(P_j)(X) = (X - 1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Puis

$$\forall i, j \in [1, n], (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

I.A.7)

$$Q = M^T$$

I.A.8) M est inversible, donc.....

$$u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$$

I.A.9) On a alors

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda + 1)^k$$

On vérifie bien :

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda + 1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda + 1) - 1)^k = u_k$$

I.B - L'opérateur de différence

I.B.1)

$$\boxed{\text{si } P, \text{ non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \text{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \text{cd}(P)}$$

I.B.2) D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(\delta(P)) \geq 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul.....

$$\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$$

La question précédente montre aussi que $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

D'après la formule du rang

$$\boxed{\text{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

I.B.3) Par récurrence :

$$\boxed{\forall j \in [1, n], \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]}$$

Si $P \in \text{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$.

Or une récurrence simpl montre que $\deg P = \deg(Q) - j$, donc $\deg(P) \leq n - j$. En utilisant la formule du rang,

$$\boxed{\forall j \in [1, n], \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]}$$

I.B.4) formule de Newton (les deux endomorphismes commutent) :

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}, \delta^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j}$$

I.B.5) Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc :

$$0(X) = [\delta^n(P)](X) = \left[\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) \right](X) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} [\tau^j(P)](X) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

il s'agit bien du polynôme nul.

Et en particulier en la valeur réelle $X = 0$:

$$\boxed{\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0}$$

I.B.6) a) Immédiat.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. On a $P \in \ker \delta^2$ Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u}$$

c) On verra un argument théorique bientôt. En attendant un calcul élémentaire marche.

d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u , notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$.

Considérons alors A , la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.

Alors A^2 est égale à la matrice de δ sur $\mathbb{R}_1[X]$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta}$$

I.B.7) a)

$$\boxed{\text{C'est une famille libre et } \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]}$$

(regarder les degré des éléments de la famille).

b) Soit V stable par δ .

Si $P \in V$, alors $\delta^i(P) \in V$ et donc $\mathbb{R}_{\deg(P)}[X] = \text{vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^n(P)) \subset V$.

Il reste à montrer l'égalité, il faut prendre le polynôme en degré maximum...

.....

il existe $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$

II Applications en combinatoire

II.A - Quelques cas particuliers

II.A.1)

si $n > p$, alors $S(p, n) = 0$

II.A.2) Une surjection d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal n est en fait une bijection...

II.A.3) Pour toute surjection de $\mathbb{N}_{n+1}$ sur $[1, n]$, un et un seul élément de $[1, n]$ admet deux antécédents, les autres 1. Notons A_i l'ensemble des surjections $\mathbb{N}_{n+1}$ sur $[1, n]$, qui accordent deux antécédents à i et pour toute partie P à deux éléments de $[1, n+1]$, $A_{i,P}$ les éléments de A_i pour lesquels l'ensemble des antécédents de i est P . Alors l'ensemble Sur des surjections de $\mathbb{N}_{n+1}$ sur $[1, n]$ vaut :

$$\text{Sur} = \prod_{i=1}^{n+1} \prod_{P \subset [1, n+1], |P|=1} A_{i,P}$$

Or tout bijection de $[1, n+1] - P$ sur $[1, n] \setminus \{i\}$ est la restriction d'un et d'un seul élément de $A_{i,P}$, donc

$$|A_{i,P} = \dots$$

II.B - Recherche d'une expression générale

II.B.1) *Le résultat fait partie du programme.*

II.B.2) pour toute partie P de $[1, n]$ notons $I_P = \{\varphi : \mathbb{N}_p \rightarrow [1, n] \mid \varphi(\mathbb{N}_p) = P\}$.

$$[1, n]^{[1,p]} = \prod_{P \subset [1,n]} I_P = \prod_{k=0}^n \left(\prod_{P \subset [1,n], |P|=k} I_P \right)$$

Or I_p est en bijection avec l'ensemble des surjections de $[1, n]$ sur P donc de cardinal $S_{n,k}$, où $k = |P|, \dots$

II.B.3) On applique alors la formule d'inversion trouvée en I.A.8).....

II.B.4) Pour $p < n$, le polynôme $P = X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après I.B.5),

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 = S(p, n)$$

On peut donc généraliser, de manière cohérente, la formule obtenue à la question précédente :

$$\forall p \in \mathbb{N}, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

II.C)