

Programme de colles n°1

1 Révisions de probabilités de sup.

- Probabilités sur un ensemble fini.
- Variables aléatoires.

2 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

- Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
- Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
- *À venir : semaine prochaine formes linéaires, hyperplans...*
- Matrices :
 - Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme.
 - Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
- *Semaine prochaine diagonalisation, trigonalisation, (point de vue géométrique et pratique).*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque * pour : C. Brévignon, Malo Le Grogne, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques ** pour : C. Brévignon, Malo Le Grogne, Augustin Ravasse.

3 Questions de cours

1. Théorème du rang : l'image d'une application linéaire est isomorphe à un supplémentaire du noyau, application si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ sont des supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel alors ils sont isomorphes (p. 40).
2. Tout élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ de rang r est équivalent à la matrice J_r . (Preuve algébrique cette semaine) .
3. Polynômes d'interpolation : existence unicité puis expression (page 42).

4 Récitation d'exercices

1. On se donne n urnes dans lesquelles on dispose au hasard et uniformément m boules. Soit $k \in \mathbf{N}$.
 - (a) Quel est la probabilité $p_{m,n}$ de l'événement « la première urne contienne k boules » ?
 - (b) Soit c un entier naturel et une suite d'entier naturels $(m_i)_{i \in \mathbf{N}}$ telle que $m_i \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} ci$. Montrer que $p_{m_i,i}$ tend vers $e^{-c \frac{c^k}{k!}}$, lorsque i tend vers $+\infty$.
 - (c) * Déterminer la probabilité $q_{m,n}$ de l'événement « Chaque urne contient au plus une boule ». Montrer que $q_{m,i}$ tend vers 1 lorsque i tend vers $+\infty$.
 Soit c un entier naturel et une suite d'entier naturels $(m_i)_{i \in \mathbf{N}}$ telle que $m_i \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} c\sqrt{i}$. Montrer que

$$q_{m_i,i} \underset{i \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right).$$

2. Soit V une variable aléatoire définie sur un univers (fini) Ω , à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. Montrer que $E(V) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(V \geq i)$.
 Soient X et Y des variables aléatoires définies sur Ω , indépendantes et qui suivent la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$. Calculer $E(\min(X, Y))$.

3. On considère une urne contenant a boules noires et b boules blanches. Après chaque tirage la boule extraite est remise dans l'urne avec c boules de sa couleur. Déterminer la probabilité $p_n(a, b)$ que la n^{e} boule tirée soit blanche. *On raisonera par récurrence.*
4. ★ Deux amis A et B jouent à un jeu chacun leur tour selon le principe suivant :
 - chaque partie est indépendante des autres ;
 - le joueur A commence ;
 - si un joueur perd sa partie alors l'autre joueur joue la prochaine partie ;
 - si un joueur gagne sa partie, alors il joue la partie suivante.
 - le joueur A gagne une partie avec une probabilité a , ($a \in]0, 1[$) et le joueur B gagne une partie avec une probabilité b , ($b \in]0, 1[$).

Quelle est la probabilité que le joueur A remporte sa première partie avant le joueur B ?
5. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que pour tout A et tout B éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\ell(AB) = \ell(BA)$; montrer qu'il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $\ell = k \text{tr}$.
6. Montrer que des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
7. ★ Même question pour équivalents. On donnera une preuve par densité algébrique, une en montrant l'invariance du rang par passage de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}$, ce de deux façons.
8. ★★ Montrer que des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$, semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$.
9. — THÉORÈME D'HADAMARD —

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, tel que pour $i = 1, 2, \dots, n$ on ait : $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1, \dots, n, \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$. Montrer que

A est inversible.

10. ★ $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Pour toute permutation σ élément de S_n , on note P_σ la matrice de permutation associée à σ . On pose : $P := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} P_\sigma$.
 - (a) Montrer que l'endomorphisme p de $\mathbf{R}^n$ associé canoniquement à P est une projection dont on déterminera l'image et le noyau.
 - (b) Montrer que p est orthogonale.
 - (c) On munit S_n d'une probabilité uniforme et l'on désigne par X la variable aléatoire qui à σ élément de S_n associe le nombre de points fixes de σ . Calculer l'espérance de X .
11. Soit n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble E , défini par

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), AMA = 0_n\},$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont on précisera la dimension en fonction du rang de A .

12. ★★ Soit $\mathbf{E}$ un espace de dimension finie. Montrer que les seuls idéaux bilatères¹ de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ sont $\{O_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}\}$ et $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.

Le résultat demeure-t-il si l'on ne suppose plus $\mathbf{E}$ de dimension finie ?

13. Effet de la multiplication à droite ou à gauche par une transvection, inverse d'une transvection.
14. ★ Montrer que tout élément de $SL_n(\mathbf{R})$ est un produit de matrices de transvection.
15. ★★ Déterminer les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont la classe de similitude est bornée.
16. ★★ — THÉORÈME DE FROBENIUS-ZOLOTAREV — Soit f une application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ continue telle que :
 - i. $f(I_n) = 1$;
 - ii. pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$.

Montrer qu'il existe une application g de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ continue vérifiant $g(1) = 1$ et $g(ab) = g(a)g(b)$ pour tout couple (a, b) de complexes, telle que :

$$f = g \circ \det.$$

1. Un idéal bilatère est un sous-groupe stable par multiplication à gauche et à droite par un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.

Programme de colles n°2

5 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

- Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômiales à p variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
- Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
- Formes linéaires, hyperplans.
- Matrices :
 - Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme. Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
 - Opérations sur les lignes et colonnes.
- Diagonalisation. (*il s'agit d'une première approche géométrique axée sur la pratique, les applications le polynôme caractéristique. Un prochain chapitre traitera des polynômes d'endomorphismes et des questions subtiles de réduction*)

On désigne u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u , d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \dots, m_k$.

- Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
- Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
- Diagonalisation des matrices et des endomorphismes. Définition. l'endomorphisme u diagonalisable si et seulement si $\bigoplus_{i=1}^k \mathbf{E}_k = \mathbf{E}$. La dimension d'un espace propre est inférieure à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée. l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $m_i = \dim(\mathbf{E}_i)$, pour $i = 1 \dots k$.
- A venir : trigonalisation révisions sur les déterminants, critère de diagonalisabilité, trigonalisation, ...

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque * pour : C. Brévignon, Malo Le Grogne, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques ** pour : C. Brévignon, Malo Le Grogne, Augustin Ravasse.

6 Questions de cours

1. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont indépendants.
2. Polynôme caractéristique : polynomialité et coefficients remarquables.
3. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par un endomorphisme u divise le polynôme caractéristique de u . L'ordre de multiplicité d'une valeur propre est supérieur à la dimension de l'espace propre associé.

7 Exercices

1. FORMULES DE WALD cf. DM 1 Soient $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que pour $n \in \mathbf{N}^*$, les variables $T, X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et que X_1 et T sont d'espérance finie. On définit la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^T X_i$.
 - (a) Montrer que $E(S) = E(T)E(X_1)$.
 - (b) * Donner une formule analogue pour $V(S)$ en supposant que X_1^2 et T^2 admettent une espérance finie.

2. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ tel que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ soit lié. Montrer que u est une homothétie. En déduire le centre de $\text{GL}(\mathbf{E})$.
3. $\star$ (On admet l'exercice précédent)
 - (a) Par K on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (ou même tout corps). Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
 - (b) Pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $[BC] = BC - CB$ (crochet de Lie de B et C). Montrer qu'il existe des matrices B et C telles que $A = [BC]$.
4. Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Comparer $\text{com}(AB)$ et $\text{com}(A)\text{com}(B)$. On commencera par le cas où A et B sont inversibles.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Etudier le rang de $\text{com}(M)$ en fonction de celui de M . Déterminer $\det(\text{com}(M))$ et $\text{com}(\text{com}(M))$.

Retrouver ces résultats par densité algébrique sans discuter sur le rang de M .

6. Déterminer les couples d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, (φ, ψ) tels que :

$$\begin{cases} \varphi' = 6\varphi + 4\psi, \\ \psi' = 11\varphi - \psi, \end{cases} \quad (1)$$

7. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension n non nulle. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $N_n = \text{Ker}(f^n)$ et $I_n = \text{Im}(f^n)$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que :

$$N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \dots \subsetneq N_{n_0} = N_{n_0+1} = \dots = N_n = \dots$$

$$I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \dots \supsetneq I_{n_0} = I_{n_0+1} = \dots = I_n = \dots$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $I_n = I_{n+1}$ si et seulement si $I_n + N_n = I_n \oplus N_n$, (cf. TD 1).

$\star$ Montrer la décroissance de la suite $(\dim(N_{i+1}) - \dim(N_i))_{i \in \mathbf{N}}$.

8. Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, 1. par densité algébrique, 2. en utilisant l'équivalence de A à $J_{\text{rg}(A)}$.
9. $\star$ Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\text{GL}_n(\mathbf{R})$.
10. Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $\text{GL}(\mathbf{E})$. Montrer que

$$\dim \left(\bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{id}_{\mathbf{E}}) \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(g).$$

11. FORME DE JORDAN

Notons pour tout entier $k \geq 2$, J_k l'élément de $\mathcal{M}_k(\mathbf{C})$ qui n'a que des 1 sur la sous-diagonale et des zéros partout ailleurs. et convenons que $J_1 = O_1$.

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, nilpotent d'ordre p .

- (a) Montrer pour $p = n$ que M est semblable à J_n .
- (b) $\star$ On suppose que $p = 2$. Montrer que M est semblable à $\text{diag}(\underbrace{J_2, J_2, \dots, J_2}_r, 0_{n-2r})$, où $r = \text{rg}(M)$.
- (c) $\star \star$ Montrer dans le cas général que $\text{Im}(f^u)$ est stable par u . En déduire qu'il existe un entier naturel $k \geq 1$, un élément $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ de $(\mathbf{N}^*)^k$ vérifiant : $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k$, et $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$, tel que M soit semblable à la matrice $\text{diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \dots, J_{\alpha_k})$.
- (d) $\star \star$ Étudier l'unicité d'une telle décomposition.
12. $\star \star$ On admet le théorème de FROBENIUS-KÖNIG : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Pour tout $\sigma \in \mathbf{S}_n$, le « serpent » $(a_{1,\sigma(1)}, a_{2,\sigma(2)}, \dots, a_{n,\sigma(n)})$, admet au moins un terme nul si et seulement si A admet une sous-matrice nulle de taille $s \times t$ avec $s + t = n + 1$.
 - (a) Montrer que toute matrice bistochastique admet un serpent dont tous les éléments sont strictement positifs.
 - (b) Montrer qu'une matrice B bistochastique a au moins n éléments strictement positifs, et que si elle a exactement n éléments strictement positifs, alors c'est une matrice de permutation.
 - (c) Montrer l'ensemble des matrices bistochastiques est l'enveloppe convexe des matrices de permutations.
 - (d) Montrer que l'ensemble des matrices bistochastiques d'ordre n est un convexe, préciser ses points extrémaux.
13. $\star \star$ Démontrer le théorème de FROBENIUS-KÖNIG.

Indication pour la question 7.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $I_n = I_{n+1}$ si et seulement si $I_n + N_n = I_n \oplus N_n$, .

★ Montrer la décroissance de la suite $(\dim(N_{i+1}) - \dim(N_i))_{i \in \mathbf{N}}$.

- Supposons $I_n + N_n = I_n \oplus N_n$. Soit l'application

$$v_n : I_n \rightarrow I_{n+1}; \vec{x} \mapsto u(\vec{x}).$$

On a $\ker(v_n) = N_1 \cap I_n \subset N_n \cap I_n = \{\vec{0}_{\mathbf{E}}\}$ par croissance de $(N_i)_{i \in \mathbf{N}}$, donc le noyau de v étant réduit à $\{\vec{0}_{\mathbf{E}}\}$, l'application v_n est injective, donc $\dim I_{n+1} \geq \dim I_n$, par le théorème du rang (l'image de v_n est isomorphe à I_n), mais joint à l'inclusion de I_{n+1} dans I_n , voilà qui assure :

$$I_n = I_{n+1}.$$

- Supposons $I_n = I_{n+1}$. Soit l'application

$$w : I_n \rightarrow I_{2n}; \vec{x} \mapsto u^n(\vec{x}).$$

Cette application est trivialement surjective, mais comme $n \geq 1$ on a $2n \geq n+1$, et donc $I_{2n} = I_n$, égalité qui transforme la surjectivité de u en bijectivité et donc en injectivité donc :

$$\{\vec{0}_{\mathbf{E}}\} = \ker(w) = I_n \cap N_n.$$

Les sous-espaces I_n et N_n sont donc en somme directe et donc, par la formule du rang supplémentaires.

Voilà pour la première équivalence.

Ensuite, la formule du rang, appliquée à v_{n+1} et à v_n , applications surjectives, veut que :

$$\dim(I_n) - \dim(I_{n+1}) = \dim(\ker(v_{n+1})) = \dim(N_1 \cap I_{n+1}) \leq \dim(N_1 \cap I_n) = \dim(\ker(v_n)) = \dim(I_n) - \dim(I_{n+1}),$$

par décroissance de la suite $((I_i))_{i \in \mathbf{N}}$. D'où la décroissance de la suite $(\dim(I_{i+1}) - \dim(I_i))_{i \in \mathbf{N}}$, et donc, par la formule du rang celle de $(\dim(N_{i+1}) - \dim(N_i))_{i \in \mathbf{N}}$.