MP* KERICHEN **2025-2026**

COMPLÉMENTSUR LES TRANSVEXIONS

Notations

Pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$ et tout réel λ non nul, $T_{i,j}(\lambda)$ désigne la matrice de transvection, $I_n+\lambda E_{i,j}$,

1. (a) Soient (i,j) et (h,k) des couples d'éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$ et λ et μ des réels non nuls. Calculer le produit matriciel $T_{i,j}(\lambda)T_{h,k}(\lambda)$.
   En déduire l'inversibilité et l'inverse de $T_{i,j}(\lambda)$.
2. Soient (i,j) un couple d'éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$, λ un réel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n$. Pour tout élément k de $\{1,\dots,n\}$ C_k désigne la k^{e} colonne de A et L_k sa k^{e} ligne.
   (a) Montrer que la matrice $AT_{i,j}(\lambda)$ se déduite de A par une transformation élémentaire portant sur les colonnes de A que l'on précisera.
   (b) Doner un résultat analogue pour $T_{i,j}(\lambda)A$.
3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$. On suppose que la première colonne ou la première ligne de A possède un élément non nul.

   Montrer qu'il existe deux éléments P et Q de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvections tels qu'en posant
   $$B=PAQ,$$
   i. $b_{1,1}=1$;
   ii. $b_{i,1}=0$, pour $i=2,\dots,n$;
   iii. $b_{1j}=0$, pour $j=2,\dots,n$.
4. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$ de rang non nul r. Montrer qu'il existe deux éléments R et S de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvections tels que : RAS soit diagonale égale soit à $\operatorname{diag}(\overbrace{1,1,\dots 1}^{r \text{ termes}},0\dots 0)$, soit à $\operatorname{diag}(1,1,\dots,1,d)$, avec $d=\operatorname{Det}(A)$, suivant que $r<n$ ou $r=n$.
5. (a) Montrer que SL_n est un sous-groupe de GL_n.
   (b) Déduire de la question 4. que l'ensemble $\mathcal{T}$ des matrices de transvection d'ordre n engendre le sous groupe SL_n.

Correction

1. (a) Soient

   (i,j) et (h,k) des couples d'éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$ et λ et μ des réels non nuls.
   $$T_{i,j}(\lambda)T_{h,k}(\lambda)=I_n+\mu E_{h,k}+\lambda E_{i,j}+\lambda\mu E_{i,j}E_{h,k}=\underline{I_n+\mu E_{h,k}+\lambda E_{i,j}+\lambda\mu\delta_{j,h}E_{i,k}.}$$

   En particulier $T_{i,j}(\lambda)T_{ij}(-\lambda)=I_n$ et donc $\underline{T_{i,j}\text{ est inversible d'inverse }T_{ij}(-\lambda).}$
2. *Cette question a été traitée en cours, en raisonnant sur les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associés, on peut bien sûr faire un calcul matriciel.*

(a) La matrice $AT_{i,j}(\lambda)$ se déduite de A par la transformation $\boxed{C_j \longleftarrow C_j + \lambda C_i}$, ($C_k$ désigne la k^{e} colonne de M pour $k = 1, \dots, n$).

(b) La matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ se déduite de A par la transformation $\boxed{L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j}$, ($L_k$ désigne la k^{e} colonne de M pour $k = 1, \dots, n$).

3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$.

Nous allons transformer la matrice A grâce à des transformations élémentaires successives en une matrice B satisfaisant les conditions i., ii.,iii. Pour ne pas allourdir les notations à chaque étape $a_{i,j}$ désignera pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ le terme d'indice (i, j) de la matrice obtenue.

A. Si $a_{1,1} = 1$, On effectue les transformations :
Pour $i = 2, \dots, n$, $L_i \longleftarrow L_i - a_{i,1}L_1$.
Pour $j = 2, \dots, n$, $C_j \longleftarrow C_j - a_{j,1}C_1$.

On obtient alors une matrice B de la forme voulue.

B. Sinon,

a. Si il existe $j \in \{2, \dots, n\}$ tel que $a_{1,j} \neq 0$, On effectue la transformation :
$C_1 \longleftarrow C_1 + \frac{1-a_{1,1}}{a_{1,j}}$.

On est ramené au cas A.

b Sinon,

α. Si il existe $i \in \{2, \dots, n\}$ tel que $a_{i,1} \neq 0$, On effectue la transformation :
$L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{1-a_{1,1}}{a_{i,1}}$. *On est ramené au cas A.*

β. Sinon, comme la première ligne ou la première colonne est non nulle, c'est que $a_{11} \neq 0$ et les autres termes de la la première ligne et la première colonne sont nuls. On effectue la transformation :
$C_2 \longleftarrow C_2 + C_1$

On est ramené au cas α.

Dans tous les cas on obtient une matrice B satisfaisant les conditions i., ii.,iii., les transformations effectuées s'obtiennent par multiplication à droite ou à gauche par des matrices de transvections, c'est-à-dire qu'il existe deux éléments P et Q de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvections tels que $\boxed{B = PAQ}$

4. Notons $\mathbf{H}_n$ la propriété à prouver.

- $\mathbf{H}_2$ est vraie.

En effet, soit A un élément de $\mathcal{M}_2$ (de rang) non nul. Si sa première ligne et sa première colonne sont nulles, alors la seconde ligne n'est pas nulle et en ajoutant la seconde ligne à la première (ce qui revient d'après 3. à multiplier par une matrice de transvection à gauche) on obtient une matrice dont la première ligne est non nulle, la question 3. assure qu'en multipliant à gauche et à droite par des matrices de transvections on obtient une matrice $\text{diag}(1, d)$. Si le rang de A est 1, $\text{diag}(1, d)$ qui lui est équivalente est de rang 1 et donc $d = 0$, sinon elle est de trang 2 et comme le déterminant d'une transvection est 1, alors A et $\text{diag}(1, d)$ ont même déterminant et donc $d = \text{Det}(A)$.

- Soit un entier $m \geq 2$. On suppose $\mathbf{H}_m$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{m+1}$ non nulle. Comme d ans le point précédent quitte à ajouter une autre ligne à la première (multiplication à gauche par une transvection) on obtient que la première ligne ou la première colonne de M est non nulle. La question 3 assure alors qu'il existe deux éléments P et Q de $\mathcal{M}_{n+1}$, produits de matrices de transvections tels que $PAQ = \text{diag}(1, A')$ Avec $A' \in \mathcal{M}_m$.

Notons que $\text{rg}(A') = \text{rg}(A) - 1$.

Donc si $\text{rg}(A) = 1$ alors A' est nulle et $PAQ = \text{diag}(1, 0, \ldots, 0)$.

Sinon $\text{rg}(A') \neq 0$ et $\mathbf{H}_m$ assure qu'il existe des éléments R' et Q' de $\mathcal{M}_m$ produits de matrices de transvections d'ordre m tels que : $R'A'S'$ vaille soit $\text{diag}(\overbrace{1, 1, \ldots 1}^{r' \text{ termes}}, 0 \ldots 0)$, soit $\text{diag}(1, 1, \ldots, 1, d)$, avec $d = \text{Det}(A')$, suivant que le rang r' de A' vérifie $r' < m$ ou $r' = m$.

Donc si $r < m + 1$ c'est-à-dire si $r' < m$ alors :

$$\text{diag}(1, R')PAQ\text{diag}(1, S') = \text{diag}(\overbrace{1, 1, \ldots 1}^{r \text{ termes}}, 0 \ldots 0.)$$

Si $r = m + 1$ c'est-à-dire si $r = m$ alors :

$$\text{diag}(1, R')PAQ\text{diag}(1, S') = \text{diag}(1, 1, \ldots, 1, d)$$

et puisque $\text{diag}(1, R')$, P, Q, et $\text{diag}(1, S')$ sont de déterminants 1, $d = \text{Det}(A)$.

Il reste à remarquer que puisque pour une transvection T' d'ordre m, $\text{diag}(1, T')$ est une transvection d'ordre $m + 1$ pour affirmer que $\text{diag}(1, R')P$ et $Q\text{diag}(1, S')$ sont des produits de transvections et avoir ainsi prouvé $\mathbf{H}_{m+1}$.

Donc $\underline{\mathbf{H}_n \text{ est vrai, pour tout entier } n \geq 2.}$

5. (a) L'application $\text{GL}_n \to \mathbf{R}\,;\ M \mapsto \text{Det}(M)$ est un morphisme de groupes. Donc son noyau, $\underline{\mathcal{S}_n, \text{ est un sous-groupe de } \text{GL}_n.}$

   (b) Soit A un élément de $\mathcal{S}_n$, d'après 4 on peut construire des éléments R et Q de $\mathcal{M}_n$ produits de matrices de transvections tels que : $RAQ = \text{diag}(1, 1, \ldots, 1, 1 = I_n$, donc tels que $A = R^{-1}Q^{-1}$. A est donc un produit d'inverses de matrices transvections (qui du reste sont encore des matrices de transvections d'après 1.(a)) et donc $A \in \langle \mathcal{T} \rangle$.

   Conclusion : $\underline{\text{l'ensemble } \mathcal{T} \text{ engendre le sous-groupe } \mathcal{S}_n.}$

INDICATIONS POUR Q. 8

Par hypothèse, on dispose de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $AP = PB$; donc le système linéaire à n^2 équations à coefficients rationnels et à n^2 inconnues (notée ici sous forme d'une matrice carrée X et non en colonne comme à l'accoutumée)

$$(AX - XB)[i, j] = 0\,;\ (i, j) \in [\![1, n]\!] \tag{1}$$

admet P, comme solution non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Donc le rang r du système, rang qui est le même qu'on le considère comme un système à coefficients rationnels ou à coefficients réels (cf. Q. 7), est strictement inférieur n^2. En posant $k = n^2 - r$ on dispose d'une base $(P_1, P_2, ..., P_k)$ du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $S_{\mathbf{Q}}$ des solutions rationnelles de (1). Les P_i sont *a fortiori* des solutions réels. La famille $(P_1, P_2, ..., P_k)$ est encore une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (le rang de la matrice $\left(\ P_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, P_k\ \right)$ est insensible au corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q}$ considéré), donc est une base de l'espace vectoriel $S_{\mathbf{R}}$ des solutions réelles. En particulier $P = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i$.

Considérons l'application

$$\phi\ :\ \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}\,(x_1, x_2, ..., x_k)\,;\ \mapsto \det\left(\sum_{i=1}^{k} x_i P_i\right).$$

L'application ϕ est élément de $\mathbf{Q}[x_1, ..., x_k]$ ensemble des applications polynomiales à k variables et à coefficients rationnels.

Précisons, ϕ est de la forme :

$$(x_1, ..., x_k) \mapsto \sum_{(i_1,...,i_k)\in\mathbf{N}^k} c_{i_1,i_2...,i_k} x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_k}$$

où $(c_{i_1,...i_k})_{(i_1,...,i_k)\in\mathbf{N}^k}$ est une famille presque nulle de rationnels.

On montre, par récurrence descendante sur k, la liberté de la famille des fonctions monômes

$$(x_1, ..., x_k) \mapsto c_{i_1,i_2...,i_k} x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_k}.$$

L'intialisation est fournie par le cours sur les polynômes, l'hérédité se prouve en utilisant qu'un élément de $\mathbf{Q}[x_1, ..., x_k]$ est à $(x_1, ...x_{k-1})$ fixé dans $\mathbf{Q}^{k-1}$, une fonction polynomiale de x_k à coefficients rationnels.

Donc si ϕ était nulle la famille $(c_{i_1,...i_k})_{(i_1,...,i_k)\in\mathbf{N}^k}$ le serait également, mais alors viendrait :

$$\det P = \sum_{(i_1,...,i_k)\in\mathbf{N}^k} c_{i_1,i_2...,i_k} \alpha^{i_1} \alpha^{i_2} ... \alpha^{i_k} = 0,$$

ce qui est absurde ! On dispose donc d'un élément $(q_1, ...q_k)$ de $\mathbf{Q}^k$ tel que $\phi(q_1, ...q_k) \neq 0$ et donc tel que $q_1 P_1 + ... + q_k P_k$ soit un élément Q de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ inversible vérifiant $QA = BQ$. Conclusions A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$.

Remarque.

- On peut remplacer $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ par un corps infini et un de ses sur-corps.
- On peut omettre la preuve de la liberté de la famille des fonctions monômes, pour peu que l'on consente à quitter le monde de l'algèbre et se risquer à utiliser la densité de $\mathbf{Q}^k$ dans $\mathbf{R}^k$.