Travaux dirigés n° 1

I. Matrices et endomorphismes nilpotents

Soit n un entier strictement positif et M une matrice d'ordre n à coefficients dans un sous-corps $\mathbf{K}$ de $\mathbf{C}$. Nous dirons que M est nilpotente si, par définition, il existe un entier strictement positif, k, tel que : $M^k = 0_n$. Quand M est nilpotente, on appelle ordre de nilpotence de M le plus petit élément de l'ensemble des entiers strictement positif k , tels que $M^k = 0_n$.

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension n, et u un endomorphisme de $\mathbf{E}$. Nous dirons que u est nilpotente si, par définition, il existe un entier strictement positif, k, tel que : $u^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$. Quand u est nilpotente on appelle ordre de nilpotence de u le plus petit élément de l'ensemble des entiers strictement positifs k, tels que $u^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$.

1. Montrer que si M est la matrice de u dans une base de $\mathbf{E}$, alors M est nilpotente d'ordre p si et seulement si u est nipotent d'ordre p.
2. Nous supposons dans cette question que u est de rang 1, montrer que u est diagonalisable ou bien est nilpotent.
3. Pour tout entier naturel i on pose $N_i = \mathrm{Ker}(u^i)$ et $I_i = \mathrm{Im}(u^i)$.
   (a) Montrer que les suites $(N_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont monotones, pour l'inclusion, on précisera leur monotonie.
   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel j tel que $N_j = N_{j+1}$. Montre alors que pour tout entier $i \geq j$, $N_i = N_{i+1}$ et $I_i = I_{i+1}$.
   (c) Soit j un entier naturel non nul. Montrer que $N_j = N_{j+1}$ si et seulement si $N_j \oplus I_j = \mathbf{E}$.
   (d) On suppose u nilpotent d'ordre p. On note j_0 le plus petit entier j tel que $N_j = N_{j+1}$, que vaut j_0 et N_{j_0}.
4. Montrer que si M est triangulaire supérieure stricte alors elle est nilpotente. Donner une matrice nilpotente qui n'est ni triangulaire supérieure stricte ni triangulaire inférieure stricte.
5. Nous supposons que M est nilpotent d'ordre n (n désigne toujours la dimension de $\mathbf{E}$).

   Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Montrer que l'élément de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   est nilpotent d'ordre 2. Déterminer une autre élément de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$, nilpotent d'ordre 2, non semblable au précédent.

La fin du I est réservée à un public averti

Notons pour tout entier $k \geq 1$, J_k l'élément [1] de $\mathcal{M}_k(\mathbf{K})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et convenons que $J_1 = O_1$.

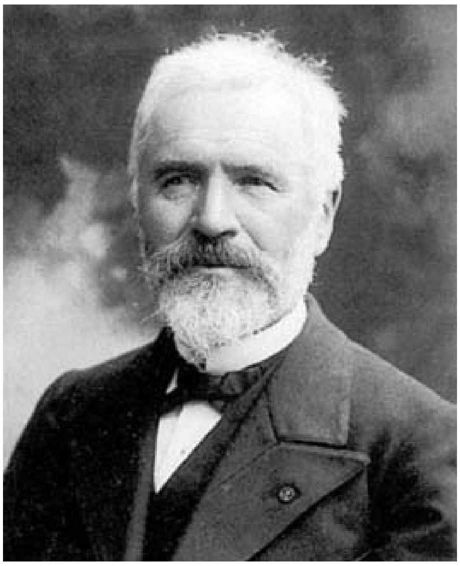

FIGURE 1 – CAMILLE JORDAN 1838–1922.
Professeur à l'École polytechnique puis au Collège de France ; on lui doit en autre la forme réduite des matrices qui porte son nom ainsi que la notion d'arc réctifiable.

Nous supposons que M est nilpotente d'ordre $p \geq 2$. On prend $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et l'on note u l'endomorphisme de $\mathbf{E}$ canoniquement associé à M. Par r nous désignerons le rang de M.

7. Montrer que $p \leq n$.
8. CAS $p = 2$
   On suppose dans cette question que $p = 2$.
   (a) Montrer que $2r \leq n$.
   (b) Montrer que M est semblable à la matrice $\mathrm{dig}(\underbrace{J_2, J_2, ...J_2}_{r \text{ termes}}, 0_{n-2r})$
9. FORME DE JORDAN DES MATRICES NILPOTENTES
   On revient au cas général.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$ est nilpotent d'ordre p' à déterminer.
   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel $k \geq 1$, un élément $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ de $(\mathbf{N}^*)^k$ vérifiant :

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_k, \quad \text{et } \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n,$$

1. Le J est en l'honneur de Camille Jordan (1838–1922), et cette notation ne doit pas être confondue avec celle du cours J_r pour l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{diag}(I_r, O_{n-r})$

tel que M soit semblable à la matrice

$$\mathrm{diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, ..., J_{\alpha_k}).$$

Indication : raisonner par récurence sur l'ordre de nilpotence de u.

10. Unicité de la forme de Jordan
    (a) Déterminer pout tout entier $j \geq 2$ et tout entier $\alpha \geq 1$ déterminer de ${J_\alpha}^j$. En déduire la valeur de α_1.
    (b) On suppose qu'il existe un entier naturel $h \geq 1$, un élément $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_h)$ de $(\mathbf{N}^*)^h$ vérifiant :
    $$\beta_1 \leq \beta_2 \leq ... \leq \beta_h, \quad \text{et } \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_h = n,$$
    tel que M soit semblable à la matrice
    $$\mathrm{diag}(J_{\beta_1}, J_{\beta_2}, ..., J_{\beta_h}).$$
    Montrer que $h = k$ puis que $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_h) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$.
    Indication : étudier successivement le rang de $M^0, M^1, \ldots, M^{p-1}$
11. Montrer que M, $2M$ et ${}^tM$ sont semblables.

Nous reprendrons cette étude dans un prochain T.D. en vue d'établir la réduction de Jordan d'une matrice quelconque

II. Matrices semblables

1. Les matrices suivantes, éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ sont-elles semblables ?
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. Même question pour
$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Même question pour les éléments de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$:
$$E := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Même question pour les éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$:
$$G := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   G et H sont-elles semblables ?
5. Montrer que E est semblable à sa transposée.

III. Equivalence à J_r

1. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
2. Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on note
$$P_{A,B} \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ \lambda \mapsto \det(B + \lambda A).$$
   (a) Montrer que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $P_{A,B}$ est une application polynomiale.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \max\{\mathrm{deg} P_{A,B} | B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\}$.
   (c) Montrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang.

IV. Espace vectoriel de matrices nilpotentes, pour 5/2
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Déterminer les éléments nilpotents de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.
2. Déterminer la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices nilpotentes.
3. Déterminer la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

V. Sous-espace vectoriel de matrices
Par n on désigne un entier naturel non nul. Les éléments de $\mathbf{R}^n$ seront notés en colonne.
On s'intéresse aux sous-espaces vectoriels $\mathbf{F}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $\mathbf{F} \setminus \{O_n\}$ soit inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

1. On suppose dans cette question et seulement dans cette question que $n = 2$. Exhiber un sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ de dimension 2 tels que $\mathbf{F} \setminus \{O_2\}$ soit inclus dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

   Dans toute la suite $\mathbf{F}$ désigne un sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $\mathbf{F}\setminus\{O_n\}$ soit inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
2. (a) En considérant
$$\phi \ : \ \mathbf{F} \to \mathbf{R}^n\,;\ M \mapsto MX_0,$$
   où X_0 est un élément non nul de $\mathbf{R}^n$, montrer que $\dim(\mathbf{F}) \leq n$.
   (b) Retrouver ce résultat en considérant l'ensemble $\mathbf{H}$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont la première colonne est nulle.
3. (**5/2 très provisoirement...**) On suppose que n est impaire. Montrer que $\dim \mathbf{F} \leq 1$.

⋆ ⋆
⋆

VI. Conjugaisons isométriques pour la norme de Frobenius
Par n sera désigné un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que l'application
$$\Phi \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,;\ M \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}M\, M)}$$
   est une norme.
2. Soient i et j des éléments de $\{1, ..., n\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Calculer $E_{i,j}A$ et $AE_{i,j}$.
3. Déterminer les éléments P de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tels que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,
$$\Phi(PMP^{-1}) = \Phi(M).$$