Corrigé du devoir maison n° 1

Exercice 1

1. Le polynôme $P_n - \tilde{P}_n$ a une infinité de racines (tous les réels de $[-1, 1]$) donc c'est le polynôme nul. On a donc $P_n = \tilde{P}_n$.
2. (a) On a $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}((e^{i\theta})^n) = \operatorname{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$. Avec la formule du binôme, on en déduit que

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}\left(\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta (i\sin\theta)^k\right) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta (-1)^k (\sin^2\theta)^k.$$
 Sachant que $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, on peut poser $P_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1 - X^2)^k$.
- (b) On constate que chacun des polynômes $X^{n-2k}(1 - X^2)^k$ est de degré n , donc $\deg P_n \leq n$. Plus précisément, la quantité $c_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ étant non nulle (somme de termes strictement positifs), P_n est de degré n et c_n est son coefficient dominant. Cette quantité se calcule en remarquant que

$$(1+1)^n + (1-1)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} + \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} = 2c_n.$$
 On a donc $c_n = 2^{n-1}$.
3. (a) On utilise la formule de trigonométrie $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ avec $p = (n-1)\theta$ et $q = (n+1)\theta$ pour obtenir $\cos(n-1)\theta + \cos(n+1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta$.
- (b) Les polynômes P_1 et P_2 existent ; en effet, on a clairement $P_1 = X$ et, puisque $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$, $P_2 = 2X^2 - 1$. Soit $n \geq 2$; supposons que P_n et P_{n-1} existent (récurrence double). Alors P_{n+1} existe et vaut $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$ d'après la formule de trigonométrie de la question précédente.
4. (a) Le seul axiome qui mérite un peu d'attention est le caractère défini positif de Φ . Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Phi(P, P) = 0$. Notons $f : \theta \mapsto P^2(\cos \theta)$. La fonction f est continue et positive, d'intégrale nulle. Par théorème, elle est nulle sur $[0, 2\pi]$. On en déduit que tous les réels de $[-1, 1]$ sont racines de P , donc P est le polynôme nul.
- (b) Soit $1 \leq n < m$. Il s'agit de montrer que $\Phi(P_n, P_m) = 0$. On a

$$\Phi(P_n, P_m) = \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta) \, d\theta.$$

Les entiers $m+n$ et $m-n$ sont non nuls donc on intègre en $\frac{\sin(m+n)\theta}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\theta}{m-n}$ et on trouve que $\Phi(P_n, P_m) = 0$.

Exercice 2

1. Notons $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$. La famille $\mathcal{F}$ étant génératrice de E , pour montrer que $f^n = \operatorname{Id}$, il suffit de montrer que $f^n(u) = u$ pour tout $u \in \mathcal{F}$. Or pour $k \in \mathbb{N}$, $f^n(f^k(x_0)) = f^k(f^n(x_0)) = f^k(x_0)$, ce qui conclut. S'il existe $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $f^k = \operatorname{Id}$, alors en particulier $f^k(x_0) = x_0$, ce qui contredit le fait que $\operatorname{Card} \mathcal{F} = n$.
2. Par l'absurde, supposons la famille $(x_0, f(x_0))$ liée. On montre alors par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x_0) \in \operatorname{Vect}(x_0)$. C'est vrai pour $k=0$; soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons que $f^k(x_0) \in \operatorname{Vect}(x_0)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f^k(x_0) = \lambda x_0$. En composant par f , et en utilisant que $f(x_0) \in \operatorname{Vect}(x_0)$ (puisque $(x_0, f(x_0))$ est liée et $x_0 \neq 0$), on obtient que $f^{k+1}(x_0) \in \operatorname{Vect}(x_0)$. La

réurrence est prouvée. On déduit de ceci que $\dim \text{Vect } \mathcal{F} = 1$, ce qui est contradictoire avec le fait que E est un plan et que $\mathcal{F}$ est génératrice de E .

On obtient maintenant facilement la liberté de (Id, f) : soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \text{Id} + \mu f = 0$. En évaluant en x_0 , on a $\lambda x_0 + \mu f(x_0) = 0$, et par liberté de $(x_0, f(x_0))$, $\lambda = \mu = 0$.

3. (a) Le fait que $f(e_1) = e_2$ explique la forme de la première colonne. Les réels a et b sont les coordonnées de $f(e_2)$ dans la base (e_1, e_2) .

La relation $f^2 = a \text{Id} + b f$ se montre par un calcul matriciel dans la base (e_1, e_2) :

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}^2 = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

- (b) On montre le résultat par récurrence sur p . Pour $p = 0$, on a $f^0 = \text{Id} = 1 \cdot \text{Id} + 0 \cdot f$. Donc on peut poser $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux réels α_p et β_p tels que $f^p = \alpha_p \text{Id} + \beta_p f$. En composant par f et en utilisant que $f^2 = a \text{Id} + f$, il vient $f^{p+1} = (\alpha_p + b\beta_p)f + a\beta_p \text{Id}$. D'où l'existence de α_{p+1} et β_{p+1} en posant $\alpha_{p+1} = a\beta_p$ et $\beta_{p+1} = \alpha_p + b\beta_p$.

D'une part, $\det(f^p) = (\det f)^p = (-a)^p$ (via la matrice de f). D'autre part,

$$\det(f^p) = \det(\alpha_p + \beta f) = \begin{vmatrix} \alpha_p & a\beta_p \\ \beta_p & \alpha_p + b\beta_p \end{vmatrix} = \alpha_p^2 + b\alpha_p\beta_p - a\beta_p^2.$$

Par ailleurs, d'après les relations de récurrences qui définissent les suites (α_p) et (β_p) , on a

$$\alpha_p\beta_{p+1} - \alpha_{p+1}\beta_p = \alpha_p(\alpha_p + b\beta_p) - a\beta_p^2 = \alpha_p^2 + b\alpha_p\beta_p - a\beta_p^2. \text{ On en conclut que } \alpha_p\beta_{p+1} - \alpha_{p+1}\beta_p = (-a)^p.$$

- (c) Du fait que $f^n = \text{Id}$ et par liberté de (Id, f) , on peut identifier et on a $\alpha_n = 1, \beta_n = 0$. De même, $f^{n+1} = f$ donc $\alpha_{n+1} = 0$ et $\beta_{n+1} = 1$. On a donc $(-a)^{n+1} = \alpha_n\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}\beta_n = 1$, d'où l'on conclut puisque a est réel que $a = \pm 1$.

4. (a) Le déterminant de (e'_1, e'_2) dans la base (e_1, e_2) vaut $\begin{vmatrix} a & a \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} = a(\mu - \lambda)$. Cette quantité est non nulle car $a = \pm 1$ et $\lambda \neq \mu$. Ainsi, (e'_1, e'_2) est libre, c'est donc une base de E .

À l'aide des relations $\lambda^2 = b\lambda + a$ et $\mu^2 = b\mu + a$, on trouve par un petit calcul que

$$f(e'_1) = \lambda e'_1 \text{ et } f(e'_2) = \mu e'_2. \text{ La matrice de } f \text{ dans } (e'_1, e'_2) \text{ est donc } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

- (b) Les relations $f^n = \text{Id}$ et $f'(e'_1) = \lambda e'_1$ impliquent (récurrence) que $\lambda^n e'_1 = e'_1$, donc $\lambda^n = 1$ car $e'_1 \neq 0$. De même, $\mu^n = 1$. On en déduit que $\lambda = \pm 1$ et $\mu = \pm 1$ car λ et μ sont réels.

On a alors *a priori* quatre cas possibles. Si $\lambda = \mu = 1$, $f = \text{Id}$ puisque sa matrice est I_2 dans la base (e'_1, e'_2) . Ce cas est exclu car $n \geq 2$. Si $\lambda = \mu = -1$, alors $f = -\text{Id}$, exclu également. Il reste $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ ou $\lambda = -1$ et $\mu = 1$. Dans les deux cas, f est alors une symétrie orthogonale d'axe $\text{Vect}(e'_1)$ ou $\text{Vect}(e'_2)$.