

1. (a) • D'abord pour tout n et m entier naturels *distincts*, $\{T = n\} \cap \{T = m\} = \emptyset$.
 • Ensuite, puisque T est à valeurs dans $\mathbf{N}$, $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{T = n\}$.

Ces deux points assurent que $(\{T = n\})_{n \in \mathbf{N}}$ est un système complet d'événements.

- (b) Prenons comme loi pour X_1 et pour T la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Alors

$$\mathbf{P}(T = 0, S = 1) = 0, \text{ en effet pour tout } \omega \in \Omega, S(\omega) = \sum_{i=1}^{T(\omega)} X_i(\omega) \leq T(\omega).$$

Par contre $\mathbf{P}(T = 0) = \frac{1}{2}$ de plus $\{S = 1\} = \{T = 1\} \cap \{X_1 = 1\}$, donc par mutuelle indépendance de T , X_0 et X_1 ,

$$\mathbf{P}(S = 1) = \mathbf{P}(T = 0)\mathbf{P}(X_0 = 0) = \frac{1}{4}.$$

Donc $\mathbf{P}(S = 2)\mathbf{P}(T = 0) \neq 0 = \mathbf{P}(T = 0, S = 2)$.

Concluons : les variables S et T ne sont pas indépendantes.

Les variable $T, X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, donc par le lemme de coalition, T et S_n sont indépendantes.

- (c) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Appliquons la formule des probabilité totale, sous sa forme brute, avec comme système complet d'événements $(\{T = n\})_{n \in \mathbf{N}}$:

$$\mathbf{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n, S = k).$$

Or¹

$$\{T = n\} \cap \{S = k\} = \{T = n\} \cap \{S_n = k\},$$

Donc

$$\mathbf{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n, S_n = k) \stackrel{\perp\!\!\!\perp}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n)\mathbf{P}(S_n = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n)\mathbf{P}(S_n = k),$$

par indépendance de S_n et T , pour tout $n \in \mathbf{N}$ et puisque $\{S_0 = 0\}$ est l'événement certain, par la convention qu'une somme vide est nulle, la somme peut commencer, si l'on veut, à 1.

2. (a) Par une double application du théorème de Fubini pour la famille *positives*,

$$(k\mathbf{P}(T = n)\mathbf{P}(S_n = k))_{(n,k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*},$$

1. C'est là le point crucial, remplacer les variables S et T non indépendantes, par S_n et T indépendantes.

en calculant dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

$$\begin{aligned}
+\infty &\geq \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(S = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(k \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n)\mathbf{P}(S_n = k) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(T = n)\mathbf{P}(S_n = k) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbf{P}(T = n) \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(S_n = k) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n)E(S_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n) \sum_{i=1}^n E(X_i) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbf{P}(T = n)nE(X_1) \right) \\
&= E(X_1) \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n)n \\
&= E(X_1)E(T) < +\infty,
\end{aligned}$$

puisque les variables X_i ont toutes même loi donc même espérance.

Donc $E(S)$ est finie et vaut $E(X_1)E(T)$.

(b) Par un raisonnement identique à celui de la question précédente,

$$\begin{aligned}
+\infty &\geq \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbf{P}(S = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(k^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n)\mathbf{P}(S_n = k) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbf{P}(T = n)\mathbf{P}(S_n = k) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbf{P}(T = n) \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\mathbf{P}(S_n = k) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n)E(S_n^2) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbf{P}(T = n) \sum_{i=1}^n E(X_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(X_i)E(X_j) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbf{P}(T = n)nE(X_1^2) + (n^2 - n)E(X_1)^2 \right) \\
&= E(X_1^2)E(T) + E(X_1)^2E(T^2) - E(X_1)^2E(T) < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc S admet un moment d'ordre 2, donc une variance, de plus par (a),

$$\begin{aligned} V(S) &= E(S^2) - E(S)^2 = E(X_1^2)E(T) + E(X_1)^2E(T^2) - E(X_1)^2E(T) - E(S)^2 \\ &= E(X_1^2)E(T) + E(X_1)^2E(T^2) - E(X_1)^2E(T) - E(X_1)^2E(T)^2 \\ &= (E(X_1^2) - E(X_1)^2)E(T) + (E(T^2) - E(T)^2)E(X_1)^2 \\ &= \underline{V(X_1)E(T) + V(T)E(X_1)^2}. \end{aligned}$$

3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega) = 1$ si et seulement si le n^{e} œuf éclot, sous réserve que $T(\omega) \geq n$. Donc la variable aléatoire S donnant le nombre de larves qui naissent suite à une ponte vaut $\sum_{i=1}^T X_i$.

D'après ce qui précède, le nombre moyen de larves qui naissent en une ponte, $E(S)$, vaut :

$$E(S) = E(X_1)E(T) = \boxed{\frac{1}{3}\lambda}.$$

La valeur de l'espérance de $E(T)$ qui est au programme de MP se trouve facilement : la variable aléatoire T est à valeur *positive*,

$$+\infty \geq E(T) = \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda,$$

voir feuille de colles de MPSI sur la formule de Taylor reste intégral pour l'expression de l'exponentielle comme la somme d'une série.