Test de connaissance sur les familles sommables

1. On considère $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels **positifs ou nuls.**
   (a) Donner la définition de la sommabilité de la famille $(u_i)_{i\in I}$.
   (b) Soient J un ensemble et $\{I_j\}_{j\in J}$ une partition de I. Citer le théorème de sommation par paquets pour la famille positive $(u_i)_{i\in I}$.
2. On considère $(v_i)_{i\in I}$ une famille de **complexes**. Donner la définition de la sommabilité de la famille $(v_i)_{i\in I}$.
3. Soit $(u_n)_{n\in \mathbf{N}}$ une suite de **complexes**. Répondre sans justifier par oui ou non.
   i. Si la série $\sum u_n$ converge alors la famille (suite) $(u_n)_{n\in \mathbf{N}}$ est sommable.
   ii. Si la famille (suite) $(u_n)_{n\in \mathbf{N}}$ est sommable alors la série converge.
   iii. Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors la famille (suite) $(u_n)_{n\in \mathbf{N}}$ est sommable.
4. soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in \mathbf{N}^2}$ une famille de **complexes**. Citez le théorème de Fubini pour cette famille.

La note finale :

$$\sqrt{\min(N_T, N_D)N_D},$$

où N_T est la note du test et N_D la note du devoir

DS n$^{\text{o}}$1

Sujet 1

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités (jusqu'à 15% de la note) pour
— manque de soin ou de lisibilité ;
— formules mathématiques non ponctuées ;
— recours à des abréviations autres que ssi (tt, qqs, fct., ens...), ou symbloles logiques mélangés à du texte.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Exemples d'équations aux dérivées partielles.

Notations

Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$,

$$U \to \mathbf{R}\,;\ (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2),$$

la première fonction dérivée partielle sera notée $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, la seconde $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, la notation variant avec le nom des variables qui interviennent dans la définition de l'application, mais aussi si l'on souhaite $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$.
Si les applications $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et on adopte les notations :
— l'application $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1}$ sera notée $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}$ ou $\partial^2_{1,1} f$;
— l'application $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)}{\partial x_2}$ sera notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ ou $\partial^2_{2,1} f$;
— l'application $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)}{\partial x_1}$ sera notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}$ ou $\partial^2_{1,2} f$;
— l'application $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)}{\partial x_2}$ sera notée $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}$ ou $\partial^2_{2,2} f$.
On admet que $\partial^2_{1,2} f = \partial^2_{2,1} f$.
Une application de U dans $\mathbf{R}^2$ est dite $\mathcal{C}^i$, pour $i = 0, , 2$, si ses deux composantes le sont
Les dérivées partielles de $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont appelées dérivées partielles de f d'ordre 2.
On admet que l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^i$, pour $i = 0, 1, 2$ est un espace vectoriel noté $\mathcal{C}^i(U, \mathbf{R})$ ainsi que l'inclusion :

$$\mathcal{C}^2(U, \mathbf{R}) \subset \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}) \subset \mathcal{C}^0(U, \mathbf{R}),$$

on admet également que la composée d'applications de classe $\mathcal{C}^i$ est de classe $\mathcal{C}^i$.
L'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique ; $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^2$.

L'objectif du problème est l'étude de quelques équations aux dérivées partielles issues de problèmes classiques des sciences.
Les trois parties sont indépendantes. Chaque partie contient à son début des questions faciles.

PARTIE I. Équation de Laplace

Par U nous désignerons un **ouvert** de $\mathbf{R}^2$, non vide.
Pour toute application f de U dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on pose

$$\Delta F = \partial^2_{1,1} f + \partial^2_{2,2} \text{ (laplacien de } f).$$

Toute application f de U dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ dont le laplacien est l'application nulle est dite HARMONIQUE.

1. Parmi les trois applications suivantes déterminer celles qui sont harmoniques :
   — $f_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x, y) \mapsto x^4 - y^4\,;$
   — $f_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x, y) \mapsto x^2 + xy - y^2\,;$
   — $f_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x, y) \mapsto \mathrm{Re}\big(\exp(x + \mathrm{i}y)\big).$
2. Rappeler la définition d'un ouvert.
3. EXPRESSION POLAIRE DE f ET DE SON LAPLACIEN
   Soient
   $$f : U \to \mathbf{R}\,;\ (x, y) \mapsto f(x, y)$$
   un élément de $\mathcal{C}^2(U, \mathbf{R})$ et (a, b) un point de U.
   (a) Montrer l'existence d'un élément R tel que, pour tout réel θ, soit défini l'application
   $$\tilde{f} : [0, R[\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ (r, \theta) \mapsto f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta).$$
   Dans la suite on fixe un tel R.
   Dans le cas où f est défini sur $\mathbf{R}^2$ on conviendra que $R = +\infty$, puisque il est alors loisible de définir $\tilde{f}$ sur $\mathbf{R}_+$.
   (b) Montrer que les applications
   $$[0, R[\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ (r, \theta) \mapsto r,$$
   $$[0, R[\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ (r, \theta) \mapsto \theta$$
   sont de classe $\mathcal{C}^2$.
   En déduire que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
   (c) Exprimer, pour tout élément (r, θ) de $[0, +R(\times\mathbf{R}$, les dérivées partielle de $\tilde{f}$ au point (r, θ),
   $$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta),\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta),$$
   en fonction des dérivées partielles de f au point $(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$,
   $$\partial_1 f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) \text{ et } \partial_2 f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta),$$
   notées également, si l'on préfère :
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta).$$
   (d) Exprimer, pour tout élément (r, θ) de $[0, +R[\times\mathbf{R}$,
   $$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r, \theta),\ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r, \theta),$$
   en fonction des dérivées partielles de f d'ordre 1 et 2, au point $(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$.

(e) Déduire de la question précédente que pour tout couple (r, θ) de $]0, +R[\times \mathbf{R}$,

$$\Delta f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta).$$

4. Applications harmoniques radiales

On suppose que l'ouvert U est $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et que le point (a, b) est le point $(0, 0)$, On définit encore $\tilde{f}$ par

$$\tilde{f} \ :]0, +\infty[\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

ce qui correspond au choix $(0, 0)$ pour (a, b), on notera que dans ce cas, exceptionnelement (a, b) n'est pas un point de U.

On suppose de plus que f est *radiale*, c'est-à-dire qu'il existe une application (nécessairement unique) g de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout élément (r, θ) de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$,

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \tilde{f}(r, \theta) = g(r)$$

(a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

(b) On suppose de plus que f est harmonique. Déterminer f.

On pourra considérer l'application $\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+^*} g'$.

5. Moyennes sur un cercle et sur un disque

Dans cette question l'ouvert U et l'élément (a, b) de U sont derechef constants. On admettra le résultat intuitif suivant et qui sera vu en cours d'année.

Les 5/2 sont tenus d'utiliser les théorèmes du cours en en vérifiant les hypothèses.

Soient I un intervalle et ϕ une application de $I \times [0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^i$, pour $i = 0, 1$, alors l'application

$$\Phi \ : \ I \to \mathbf{R}\,; r \mapsto \int_0^{2\pi} \phi(r, \theta)\mathrm{d}\theta$$

est de classe $\mathcal{C}^i$, de plus pour $i = 1$,

$$\Phi' \ : \ I \to \mathbf{R}\,; r \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial r}(r, \theta)\mathrm{d}\theta.$$

Pour tout $r \in]0, R[$ on pose :

$$m(a, b, r) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) r\mathrm{d}\theta,$$

moyenne de f sur le cercle de centre (a, b) et de rayon r

$$M(a, b, r) = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \left(\int_0^{2\pi} f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho,$$

moyenne de f sur le disque fermé de centre (a, b) et de rayon r.

Enfin on pose $m(a, b, 0) = f(a, b)$.

Notons que l'on a l'expression

$$m(a, b, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

valable pour tout $r \in [0, R[$.

On notera autant qu'il est possible et de manière à simplifier $M(R)$ au lieu de $M(a, b, R)$ et $m(r)$ au lieu de $m(a, b, r)$, lorsque il n'y a pas d'ambiguïté.

(a) Montrer que l'application $m \;:\; [0,R[\to \mathbf{R}\,;\; r\mapsto m(r)$ est dérivable. Préciser sa dérivée grâce à $\tilde{f}$.

(b) On suppose dans cette question f harmonique.

Montrer que l'application $\gamma \;:\;]0,R[\to \mathbf{R}\,;\; r\mapsto rm'(r)$ est dérivable de dérivée nulle.

En déduire de ce qui précède, que pour tout élément r de $[0,R[$, $m(r)=f(a,b)$.

(c) Montrer si f est harmonique, alors pour tout élément r de $]0,R[$, $M(r)=f(a,b)$.

(d) On suppose que pour tout $(x,y)\in U$ il existe un réel $R_{(x,y)}$ tel que :

$$\forall r\in]0,R_{(x,y)}[,\; m(x,y,r)=f(x,y).$$

Montrer que f est harmonique.

6. Théorème de la borne atteinte pour $\mathcal{D}$

On note $\mathcal{D}$ le disque fermé unité de $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2, \|(x,y)\|\leq 1\}$, $\mathcal{D}_\text{o}$ le disque ouvert unité de $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{D}_\text{o}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2, \|(x,y)\|< 1\}$ et pour finir $\mathcal{C}$ le cercle unité de $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2, \|(x,y)\|= 1\}$.

Si h est une application définie sur un ensemble A non vide, à valeurs réelles on note $\sup\limits_{x\in A} h(x)$ la borne supérieure de l'ensemble $\{h(x), x\in A\}$, si celui-ci est majoré, $+\infty$ sinon.

Soit h une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{R}$ **continue**.

(a) Construire une suite de points $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{D}$ telle que $h(p_n)\underset{n\to+\infty}{\to}\sup\limits_{p\in\mathcal{D}} h(p)$.

On se limitera à prouver un des deux cas, au choix : $\sup\limits_{p\in\mathcal{D}} h(p)\in\mathbf{R}$ ou $\sup\limits_{p\in\mathcal{D}} h(p)=+\infty$.

Pour tout $n\in\mathbf{N}$ on écrira $p_n=(x_n,y_n)$.

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une suite extraite $(x_{\phi(k))_{k\in\mathbf{N}}}$ convergente.

(c) Montrer que la suite $(p_{\phi(k))_{k\in\mathbf{N}}}$ admet une suite extraite convergente de limite un point de $\mathcal{D}$.

(d) En déduire que h atteint sa borne supérieure en un point de $\mathcal{D}$.

On admet que la restriction de h à $\mathcal{C}$ atteint sa borne supérieure en un point de $\mathcal{C}$ (preuve analogue).

7. Théorème du maximum

Soit f une fonction continue sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles et dont la restriction à $\mathcal{D}_\text{o}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

(a) Montrer que si f admet en un point p de $\mathcal{D}_\text{o}$ un maximum local, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(p)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(p)=0$ puis que $\Delta f(p)\leq 0$.

On pourra étudier les deux applications partielles de f au point p,

$$t\mapsto f(p+t(1,0)) \text{ et } t\mapsto f(p+t(0,1)).$$

Dans la suite On suppose de surcroît que la restriction de f à $\mathcal{D}_\text{o}$ est **harmonique** et se donne d un point de $\mathcal{D}$ tel que $f(d)=\sup\limits_{p\in\mathcal{D}} h(p)$ et c un point de $\mathcal{D}$ tel que $f(c)=\sup\limits_{p\in\mathcal{C}} h(p)$

On suppose dans la suite que que $f(d) > f(c)$. Soient, $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ et l'application

$$f_\varepsilon \ : \ \mathcal{D} \to \mathbf{R} \, ; \ x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x\|^2$$

(b) Montrer que la restriction de f_ε à $\mathcal{D}_o$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer le laplacien de cette application.

(c) Par un choix judicieux de ε, arriver à une contradiction. En déduire que f atteint sa borne supérieure en un point de $\mathcal{C}$.

(d) **Réservé 5/2** Retrouver le résultat de la sous-question (c) grâce à la question 5.(d), en montrant que si f atteint sa borne supérieure en un point de $\mathcal{D}_o$, alors elle est constante.

8. Problème de Dirichlet pour le disque
Montrer qu'il existe au plus une application g_h de $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{R}$, telles que :
— elle soit continue ;
— sa restriction à $\mathcal{D}_o$ soit harmonique ;
— elle coïncide avec h sur $\mathcal{C}$.
La preuve de l'existence d'une telle application nécessiterait à elle seule un sujet. Ce problème intervient lorsque on s'intéresse à la température à l'équilibre d'un disque dont les points du bord ont leur température imposée, ou bien lors de la détermination de la forme d'une membrane de tambour tendue sur un contour non rigoureusement plan.

PARTIE II. Équation de transport

Soit c un nombre réel. On se propose d'étudier l'ensemble

$$A = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2) \,|\, \partial_1 f + c\partial_2 f = 0\}.$$

1. Soit f un élément de A. Montrer que pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbf{R}^2$, la fonction $\varphi \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi(t) = f(t_0 + t, x_0 + ct)$ est constante. En déduire une expression de f en fonction de $u \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $u(x) = f(0, x)$.
2. À tout $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ on associe la fonction $E(u) \ : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall (t,x) \in \mathbf{R}^2, \ E(u)(t,x) = u(x - ct)$$

Montrer que l'application linéaire E qui à u associe $E(u)$ envoie $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Montrer que E est injective et que son image est l'ensemble des solutions de (A).

On note $q \ : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $q(t,x) = x - ct$. Soit Ω une partie de $\mathbf{R}^2$.

3. On suppose que $\mathbf{R} \backslash q(\Omega)$ ne contient aucun intervalle non vide. Montrer que tout élément de $\mathbf{R}$ est limite d'une suite d'éléments de $q(\Omega)$. En déduire que deux éléments de (A) qui coïncident en tout point de Ω sont égaux.
4. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ qui est nulle hors de $]a, b[$ mais qui n'est pas identiquement nulle. *Indication : on pourra chercher une fonction dont la restriction à $[a, b]$ est polynomiale.*
5. Montrer que si $\mathbf{R} \setminus q(\Omega)$ contient un intervalle ouvert non vide, alors il existe deux éléments distincts de A qui coïncident sur Ω.
6. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Soient $s_1, \ldots, s_k$ des éléments deux à deux distincts de l'intervalle $[0, 1[$. Montrer qu'il existe i et j appartenant à $\{1, \ldots, k\}$ tels que $0 < |s_i - s_j| < \frac{1}{k-1}$.

7. Soit α un nombre irrationnel. Montrer que si m et n sont deux entiers relatifs distincts, alors $m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor \neq n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$. En déduire que pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*0$, l'ensemble $T = \{n_1\alpha + n_2 /\ (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2\}$ contient deux éléments t_1 et t_2 tels que $0 < |t_1 - t_2| < r$, puis que $\mathbf{R} \setminus T$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide.
8. Discuter, en fonction de la valeur de la constante c, l'existence d'éléments distincts de (A) qui coïncident sur $\mathbf{Z}^2$.

PARTIE III. Un dernière exemple

Soit S_C l'ensemble des éléments f de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ dont la restriction à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et tels que pour tout $(t, x) \in (\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$:

$$\partial_1 f(t,x) + f(t,x)\partial_2 f(t,x) = 0. \qquad (C)$$

Soit u une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ *croissante.*

1. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ et tout $x \in \mathbf{R}$, il existe un unique réel $a(t,x)$ tel que :

$$x = a(t,x) + tu(a(t,x)).$$

   On pourra pour tout réel $t > 0$, *étudier l'application* $\chi_t \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; y \longmapsto y + tu(y)$.
   On admettra que la fonction $a \ : \ \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ainsi définie, est continue et que sa restriction à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

   (b) Exprimer les dérivées partielles de a en fonction de u de a et de u'.

   On définit la fonction

$$f \ : \ \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ (t,x) \mapsto u(a(t,x)).$$

   (c) Montrer l'égalité $f(0,x) = u(x)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, puis montrer que la fonction f est élément de S_C.

   (d) Application : On prend pour u l'application identité de $\mathbf{R}$. Déterminer f, vérifier que a est bien continue et que sa restriction à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Soit g un élément de S_C. Soient (t_0, x_0) un point de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et

$$F_{x_0} = \Big\{(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0)), t \in \mathbf{R}\Big\}.$$

   (a) Identifier la nature géometrique de F_{x_0} et représenter pour $t_0 = 2$, F_1 et F_2 en supposant $g(0,1) = \frac{1}{2}$ et $g(0,2) = -1$.

   (b) Montrer que g est constante sur $(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}) \cap F_{x_0}$.

3. (a) Montrer que pour tout réel $\tau > 0$, l'application de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto g(\tau, x)$ est croissante, on pourra noter cette application $g(\tau, \cdot)$.

   (b) En déduire que que $g(0, \cdot)$ est croissante.

   (c) En prenant pour u l'application $g(0, \cdot)$, exprimer g au moyen de u et de l'application a définie comme en 1.(a).

Correction du DS n°1

Exemples d'équations aux dérivées partielles.

PARTIE I. Équation de Laplace

1. Parmi les trois applications suivantes déterminer celles qui sont harmoniques :
   — Notons que Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,
   $$f_3(x, y) = \exp(x)\cos(y),$$
   les applications $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x, y) \mapsto x($ ou $y)$ sont trivialement de classe $\mathcal{C}^2$ (dérivées partielles d'ordre 2 nulles). Par produits et sommes de ces applications f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$. Comme les applications exp et cos sont notoirement de classe $\mathcal{C}^2$, par composition et produit d'applications $\mathcal{C}^2$, l'aplication f_3 est $\mathcal{C}^2$.
   $$\Delta f_1(1, 0) = 4 \times 31^2 - 4 \times 30^2 = 12 \neq 0.$$
   $\underline{f_1 \text{ n'est pas harmonique.}}$ Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,
   $$\Delta f_2(x, y) = 2 - 2 = 0\,;\ \Delta f_3(x, y) = \exp(x)\cos(y) + \exp(x)(-\cos(y)) = 0.$$
   $\underline{f_2 \text{ et } f_3 \text{ sont harmoniques.}}$
2. Cours.
3. Expression polaire de f et de son laplacien
   (a) Comme U est un ouvert, on dispose de $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\mathrm{D_o}((a, b), R)$ disque ouvert de centre (a, b) de rayon R soit inclus dans U. Pour tout $r \in [0, R[$, et tout réel θ,
   $$\|(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) - (a, b)\| = r < R,$$
   donc $(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) \in \mathrm{D_o}((a, b), R) \subset U$
   D'où la définition de
   $$\tilde{f}\ :\ [0, R[\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ (r, \theta) \mapsto f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta).$$
   (b) Les applications
   $$[0, R[\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ (r, \theta) \mapsto r,$$
   $$[0, R[\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ (r, \theta) \mapsto \theta$$
   sont de classe $\mathcal{C}^2$, puisque leur dérivées partielles d'ordre 1 sont constantes, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs les application cos et sin sont de de classe $\mathcal{C}^2$, tout comme f. Donc par compositions produits, sommes d'applications de classe $\mathcal{C}^2$, on a :
   $\underline{\tilde{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^2.}$

(c) Soit $(r,\theta)\in[0,+R(\times\mathbf{R}$,

$$\boxed{\frac{\partial\tilde f}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)},$$

$$\boxed{\frac{\partial\tilde f}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)}$$

(d) Soit $(r,\theta)\in[0,+R(\times\mathbf{R}$, en utilisant $\partial^2_{1,2}f=\partial^2_{2,1}f$, on a :

$$\frac{\partial^2\tilde f}{\partial r^2}(r,\theta)=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(p(r,\theta)\right)+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(p(r,\theta)\right)+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(p(r,\theta)\right),$$

$$\frac{\partial^2\tilde f}{\partial\theta^2}(r,\theta)=r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(p(r,\theta)\right)-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(p(r,\theta)\right)+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(p(r,\theta)\right)-$$
$$r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(p(r,\theta)\right)r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\left(p(r,\theta)\right).$$

(e) Donc, d'après la question précédente,

$$\frac{\partial^2\tilde f}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde f}{\partial\theta^2}(r,\theta)=\Delta f(p(r,\theta))-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(p(r,\theta)\right)r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\left(p(r,\theta)\right),$$

d'où

$$\underline{\Delta f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)=\frac{\partial^2\tilde f}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde f}{\partial\theta^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde f}{\partial r}(r,\theta).}$$

4. Applications harmoniques radiales

(a) L'application $p\ :\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+^*\,;\ (r,\theta)\mapsto(r,0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (ses composantes, on l'a vu, le sont), $\tilde f$ également, donc comme $g=\tilde f\circ p$, <u>l'application g est de classe $\mathcal{C}^2$.</u>

(b) D'après 3.(e), f est harmonique si et seulement si pour tout réel $r>0$,

$$0=g''(r)+\frac{1}{r^2}\times 0+\frac{1}{r}g'(r)=r^2(\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+^*}g')'(r),.$$

soit $0=(\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+^*}g')'(r)$. Donc $\mathbf{R}_+^*$ étant un **intervalle**, f est harmonique si et seulement si il existe des réels a et b tels que pour tout réel $r>0$ $g(r)=a\ln(r)+b$, où a et b sont des réels quelconques.
Comme l'application $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\};:\ (r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$ est surjective L'application f est donc de la forme [1]

$$\underline{\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbf{R}\,;\ (x,y)\mapsto a\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+b,\ \text{avec }(a,b)\in\mathbf{R}^2.}$$

5. Moyennes sur un cercle et sur un disque

(a) Remarquons qu'en

$$m\ :\ [0,R[\to\mathbf{R}\,;\ r\mapsto\int_0^{2\pi}\tilde f(r,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Comme, on l'a vu $\tilde f$ est de classe $\mathcal{C}^2$, donc $\mathcal{C}^1$, par le théorème admis, m est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$m'\ :\ [0,R[\to\mathbf{R}\,;\ r\mapsto\int_0^{2\pi}\frac{\partial\tilde f}{\partial r}(r,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

1. On peut supprimer le radical dans cette expression, le facteur $\frac{1}{2}$ étant absorbé par la constante arbitraire a.

(b) On a vu que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ est $\mathcal{C}^1$, le théorème admis assure donc que m' l'est aussi et que

$$m' \;:\; [0,R[\to \mathbf{R}\,;\; r\mapsto \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Donc γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $r\in]0,R[$ en utilisant 3. (c), et l'harmonicité de f,

$$\begin{aligned}\gamma'(r) =& rm''(r)+m'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\mathrm{d}\theta \\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\left(\Delta(f)(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r,\theta)\right)\mathrm{d}\theta \\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 0-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r,\theta)\mathrm{d}\theta \\ =&-\frac{1}{2\pi r}\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)\right]_0^{2\pi} \underline{=0.}\end{aligned} \tag{1}$$

En effet pour tout réel $r\in]0,R[$, $\tilde{f}(r,\cdot)$ et donc $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\cdot)$ sont 2π-périodiques. Donc m' est nulle sur $]0,R[$, donc m est constante sur l'intervalle $]0,R[$ et même, étant continue sur $[0,R[$, m est constante sur cet intervalle :

$$\boxed{\forall r\in[0,r[,\; m(r)=f(a,b)}$$

(c) Pour tout élément r de $]0,R[$, $M(r)=f(a,b)$.
Soit $r\in]0,r[$, grace à (b),

$$\underline{M(a,b,r)=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi m(\rho)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi f(a,b)\rho\mathrm{d}\rho=f(a,b).}$$

(d) Soit $(a,b)\in\mathbf{R}^2$. L'application $m(a,b,\cdot)$, toujours notée m est donc constante sur $[0,R_{a,b}[$ et donc γ puis γ' (notations de l'énoncé) sont nulles sur $[0,R_{a,b}[$.
Le calcul fait en 5.(b) donne pour tout $r\in]0,R_{a,b}[$,

$$\begin{aligned}0=g'(r)=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\left(\Delta(f)(r\cos\theta,r\sin\theta)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r,\theta)\right)\mathrm{d}\theta \\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\Delta(f)(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2\pi r}\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)\right]_0^{2\pi} \\ =&\frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta(f)(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{2}$$

Mais alors la continuité de $\Delta(f)$ (l'application f est $\mathcal{C}^2$) et celle déja rencontrée de $((r,\theta)\mapsto(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)$ conduise à la continuité de :

$$\mathbf{R}_+\times[0,2\pi]\to\mathbf{R}\,;\;(r,\theta)\mapsto\Delta(f)(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta).$$

Donc, par la proposition admise,

$$0=\int_0^{2\pi}\Delta(f)(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\underset{r\to0^+}{\longrightarrow}\int_0^{2\pi}\Delta(f)(a,b)\mathrm{d}\theta=2\pi\Delta(f)(a,b).$$

<u>Donc f est harmonique.</u>

(a) Traitons le cas : $\sup_{p\in\mathcal{D}} h(p) \in \mathbf{R}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ la propriété caractéristique de la borne supérieure permet de choisir un élément s_n de $\{h(p), p \in \mathcal{D}\}$ tel que :

$$\sup_{p\in\mathcal{D}} h(p) \leq s_n < \sup_{p\in\mathcal{D}} h(p) + \frac{1}{n+1}.$$

En choisisant pour tout $n \in \mathbf{N}$, dans $\mathcal{D}$, un antécédent p_n de s_n par ϕ, on a

$$\sup_{p\in\mathcal{D}} h(p) \leq h(p_n) < \sup_{p\in\mathcal{D}} h(p) + \frac{1}{n+1}.$$

On a ainsi une suite d'éléments de $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{D}$ telle que $\underline{h(p_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \sup_{p\in\mathcal{D}} h(p)}$, par encadrement

(b) La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et bornée puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|x_n| = \sqrt{x_n^2} \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = 1.$$

par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ convergente.

(c) La suite $(y_{\phi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ est à valeur dans $[-1, 1]$, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite $(y_{\phi(\psi(j))})_{j\in\mathbf{N}}$ convergente.

Par ailleurs la suite $(x_{\phi(\psi(j))})_{j\in\mathbf{N}}$ converge comme suite extraite de la suite convergergente $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$.

Donc la suite $(p_{\phi(\psi(j))})_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(p_{\phi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ <u>convergente</u>. Notons p sa limite, élément de $\mathbf{R}^2$ que nous écrirons (a, b).

Pour tout $j \in \mathbf{N}$, comme $p_{\phi(\psi(j))}$ est élément de $\mathcal{D}$, donc

$$x^2_{\phi(\psi(h))} + y^2_{\phi(\psi(j))} \leq 1$$

En laissant tendre j vers $+\infty$, $a^2 + b^2 \leq 1$, ce qui assure que $\underline{p \in \mathcal{D}}$.

(d) D'une part $h(p_{\phi(\psi(j))} \underset{j\to+\infty}{\to} \sup_{p\in\mathcal{D}} h(p)$ par extraction dans 6.(a). D'autre part, par **continuité** de h en p, point de D, $h(p_{\phi(\psi(j))} \underset{j\to+\infty}{\to} h(p)$. L'unicité de la limite veut :

$$\boxed{h(p) = \sup_{p\in\mathcal{D}} h(p)}$$

6. Théorème du maximum

Soit f une fonction continue sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles et dont la restriction à $\mathcal{D}_\text{o}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

(a) Comme $\mathcal{D}_\text{o}$ est ouvert et f de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0\,;\ \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0}$$

Toujours par ouverture de $\mathcal{D}_\text{o}$ est définition d'un maximum local, on dispose d'un réel $R > 0$ tel que :

— le disque ouvert $\mathrm{D}_0(p, R)$ de centre p de rayon R soit incluse dans $\mathcal{D}_\text{o}$;

— pour tout élément q de ce disque, $f(q) \leq f(p)$.
la définition des dérivées partielles donne pour tout $t \in]-R, R[$:

$$f_1'(t) = \partial_1 f(p + t(1,0))\,;\ f_2'(t) = \partial_2 f(p + t(0,1))\,;$$

puis donc

$$f_1''(0) = \partial_{1,1}^2 f(p)\,;\ f_2''(0) = \partial_{2,2}^2 f(p).$$

Supposons que $f_1''(p) > 0$, alors par continuité de f_1'', on dispose d'un élément h de $]0, R[$ tel que f_1'' soit positif strictement sur $]-h, h[$. Comme $f_1'(0) = 0$, on a $f_1'(t) > 0$ sur $]0, h[$ et donc :

$$f(p) = f_1(0) < f_1\left(\frac{h}{2}\right) = f\left(p + \left(\frac{h}{2}, 0\right)\right) \leq f(p),$$

car $\left(p + \left(\frac{h}{2}, 0\right)\right) \in \mathrm{D}_0(p, R)$, ce qui est absurde !
Donc $0 \geq f_1''(0) = \partial_{1,1}^2 f(p)$, de même $0 \leq f_2''(0) = \partial_{2,2}^2 f(p)$ et donc :

$$\boxed{\Delta f(p) \leq 0}$$

(b) Comme $(x, y) \mapsto x$ (ou y) est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_{\mathrm{o}}$ et que f également, par produit et sommes d'applications de classe $\mathcal{C}^2$, l'application

$$\mathcal{D}_{\mathrm{o}} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto f(x) + \varepsilon(x^+ y^2)$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ [2]. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_{\mathrm{o}}$

$$\Delta f_\varepsilon(x, y) = \Delta f(x, y) + \varepsilon(2 + 2) = 4\varepsilon.$$

(c) On suppose $f(c) < f(d)$.
On a donc $d \in \mathcal{D}_0$. Choisissons pour $\varepsilon = \frac{1}{2}(f(d) - f(c))$.
On a

$$\sup_{p \in \mathcal{C}} f_\varepsilon(p) = f(c) + \varepsilon = f(c) + \frac{1}{2}(f(d) - f(c)) = \frac{1}{2}(f(d) + f(c)) < f(d) \leq f_\varepsilon(d) \leq \sup_{p \in \mathcal{D}} f_\varepsilon(p).$$

Donc f_ε atteint sa borne supérieur en un point p_ε intérieur à $\mathcal{D}$. Or f_ε est continue sur $\mathcal{D}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_{\mathrm{o}}$ Donc par (a) :

$$0 \geq \Delta(f_\varepsilon)(p_\varepsilon) = \Delta(f)(p_\varepsilon) + 4\varepsilon = 4\varepsilon > 0.$$

Voila qui est absurde ! Donc

$$\boxed{\sup_{p \in \mathcal{C}} f(p) = \sup_{p \in \mathcal{D}} f(p).}$$

(d) Supposons que f atteigne sa borne supérieure en un point d de $\mathcal{D}_{\mathrm{o}}$. Noton X l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}_{\mathrm{o}}$ en lesquels f prend la valeur $f(d)$.
Par continuité de f l'ensemble X est un fermé relativement à $\mathcal{D}_{\mathrm{o}}$.
La question 5.(d) assure que f est constante sur tout disque centrée en un point de X et inclus dans $\mathcal{D}_{\mathrm{o}}$, voir lemme ci-dessous, donc X est un ouvert, donc un ouvert

2. on dira prochainement $(x, y) \mapsto \varepsilon(x^2 + y^2)$ est $\mathcal{C}^2$ car polynomiale.

relatif de X. Or X est connexe par arcs (c'est une boule), Donc X qui n'est pas vide puisque d appartient à X, est $\mathcal{D}_o$ entier, cf exercice de colle.
Donc f est constante sur $\mathcal{D}_o$ et par continuité sur $\mathcal{D}$.

LEMME. *Soit* $R \in \mathbf{R}_+^*$ *tel que le disque* $\mathrm{D}_o(d,R)$ *soit inclus dans* $\mathcal{D}_o$*, alors* f *est constante sur* $\mathrm{D}_o(d,R)$

Preuve. Notons (a,b) le point d.
Pour tout $r \in]0,R[$, par 5.(c)

$$0 = f(a,b) - M(a,b,r) = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi(f(a,b) - m(a,b,\rho))\rho \mathrm{d}\rho.$$

Dérivons en r cette égalité, la continuité de $]0,r] \to \mathbf{R}\,;\ \rho \mapsto (2\pi f(a,b) - m(a,b,\rho))\rho$, qui provient de 5.(a) permet d'appliquer par le théorème fondamentale de l'annalyse,

$$\forall r \in]0,R[,\ 0 = f(a,b) - m(a,b,r) = \int_0^{2\pi} f(a,b) - f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Pour tout $r \in]0,R[$ et tout $\theta \in [0,2\pi]$, on a donc

$$0 = f(a,b) - f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta),$$

puisque $\theta \mapsto f(a,b) - f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$ est **positive** et **continue**
Donc f est constante sur $\mathrm{D}_o(d,R)$, par surjectivité de

$$]0,R[\times[0,2\pi] \to \mathrm{D}_o(d,R) \setminus \{(a,b)\}\,;\ (r,\theta) \mapsto (a + r\cos\theta, b + r\sin\theta).$$

7. PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LE DISQUE
Soient des applications g_h et γ_h de $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{R}$, continues et dont les restrictions à $\mathcal{D}_o$ soient harmoniques qui coïncident avec h sur $\mathcal{C}$.
Posons $f = g_h - \gamma_h$. Cette application est continue sur $\mathcal{D}$ de restriction à $\mathcal{D}_o$ harmonique et est nulle sur $\mathcal{C}$. D'après (b) f atteint atteint sa borne supérieur sur $\mathcal{C}$ et est donc négative. Symétriquement $\gamma_h - g_h$ est négative et donc : $\boxed{g_h = \gamma_h}$.

PARTIE II. Équation de transport

Soit c un nombre réel. On se propose d'étudier l'ensemble

$$A = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)\,|D_1 f + cD_2 f = 0\}$$

1. Pour tout $(t_0,x_0) \in \mathbf{R}^2$, comme $t \mapsto t_0 + t$ et $t \mapsto x_0 + ct$ sont $\mathcal{C}^1$ et que f également, par le cours, l'application φ est est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et.

$$\forall t \in \mathbf{R}\ \ \varphi'(t) = \partial_1 f(t_0 + t, x_0 + ct) + c\partial_2 f(t_0 + t, x_0 + ct) = 0,$$

et donc φ est constante sur l'intervalle $\mathbf{R}$ et en particulier $\varphi(0) = \varphi(-t_0)$. On obtient pour tout $(t_0,x_0) \in \mathbf{R}^2$. $\underline{f(t_0,x_0) = f(0,x_0 - ct_0) = u(x_0 - ct_0)}$.

2. Si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$, la fonction $E(u)$ appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$ comme composée de f fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et d'une application linéaire, donc $\mathcal{C}^1$. Ainsi E définit une application, clairement linéaire, de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$.
• Si $u \in \mathrm{Ker}(E)$, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $E(u)(0,x) = u(x) = 0$. Donc u est la fonction nulle, et donc E est <u>injective.</u>

• Soient f élément de l'image de E et u un antécédent ($u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$). Alors $\forall (t,x) \in \mathbf{R}^2$ $f(t,x) = u(x-ct)$. On a $\partial_1 f(t,x) = -cu'(x-ct)$ et $\partial_2 f(t,x) = u'(x-ct)$. Donc f est solution de (A).
• Réciproquement, d'après 1.a) si f est solution de (A), alors $f = E(u)$ avec $u : x \longmapsto f(0,x)$.

Donc $\boxed{A = E(\mathcal{C}^1(\mathbf{R}))}$

3. Soit $y \in \mathbf{R}$. pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'intervalle $\rrbracket y, y + \dfrac{1}{n+1}\llbracket$ n'est pas inclus dans $\mathbf{R} \setminus q(\Omega)$ et on peut choisir un élément $y_n \in q(\Omega) \cap \rrbracket y, y + \dfrac{1}{n+1}\llbracket$ La suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}})$ ainsi construite converge vers y.
Si f et g sont deux éléments de A coïncidant sur Ω, on dispose d'éléments u et v de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ tels que $f = u \circ q$ et $g = v \circ q$. Les applications u et v coïncident sur $q(\Omega)$. la question précédente établie la densité de cet ensemble donc , par **continuité** de u et v, on a $u = v$, Donc $f = g$.
4. On considère la application u de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définie par $u(x) = 0$ si $x \notin]a,b[$ et $u(x) = (b-x)^2(x-a)^2$ sinon.
• D'abord $\lim\limits_{x\to a_+} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to b_-} u(x) = 0$, donc u est continue.
• Ensuite a restriction de u à $]-\infty, a[$ à $]a,b[$ et à $]b,+\infty[$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.
• Enfin u' admet 0 comme limite en a et en b.
Le théorème de la classe $\mathcal{C}^1$ assure que u est de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en dehors de $[a,b]$ et non nulle.
5. On suppose que $\mathbf{R} \setminus q(\Omega)$ contient un intervalle $]a,b[$, avec $a < b$. Les deux applications $f : (t,x) \longmapsto 0$ et $g : (t,x) \longmapsto u(x-ct)$ où u est la fonction donnée dans la question 2.b), sont deux éléments distincts de A, (puisque $g\left(\frac{a+b}{2}, 0\right) \neq 0$).
6. 3.a) Supposons, quitte à les réindexer, les réels $s_1, s_2, ..., s_k$ classés dans l'ordre croissant. Supposons que, pour tout j on ait $s_j - s_{j-1} \geq \frac{1}{k-1}$. Alors $s_k - s_1 = \sum_{j=2}^{k}(s_j - s_{j-1}) \geq (k-1)\frac{1}{k-1} = 1$, ce qui contredit $(s_1, s_k) \in [0,1[^2$. Il existe donc i et j tels que $0 < |s_i - s_j| < \frac{1}{k-1}$.
7. Supposons $m\alpha - [m\alpha] = n\alpha - [n\alpha]$ avec $m \neq n$. Alors
$$\alpha = \frac{[m\alpha] - [n\alpha]}{m-n} \in \mathbf{Q},$$
ce qui est contradictoire.
Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $s_n = n\alpha - [n\alpha]$, et notons que
$$s_n \in T \cup [0,1[.$$
Choisissons k tel que $\frac{1}{k-1} < r$. Les nombres $s_1, ..., s_k$ sont deux à deux distincts. D'après 3.a), deux d'entre eux, disons t_1 et t_2, vérifient
$$\boxed{0 < |t_1 - t_2| < \frac{1}{k-1} < r}.$$
On suppose que $\mathbf{R} \setminus T$ contient un intervalle ouvert $]a,b[$. On choisit $r = b-a$, on dispose de t_1 et t_2 éléments de T vérifiant $0 < t_1 - t_2 < r$.

On pose $n = \left\lfloor \frac{a}{t_1 - t_2} \right\rfloor$.
D'une part $(n+1)(t_1 - t_2) \in T$, car T est un sous groupe de $(\mathbf{R}, +)$.
D'autre part a

$$n(t_1 - t_2) \leq a < (n+1)(t_1 - t_2) < n(t_1 - t_2) + r \leq b.$$

Le réel $(n+1)(t_1 - t_2)$ appartient à $T \cap]a, b[$, ce qui est contradictoire.

8. Soient f et g deux élément de A coïncidant sur $\mathbf{Z}^2$.
• Si c est irrationel, l'ensemble $\mathbf{R} \setminus q(\mathbf{Z}^2)$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide. Donc, d'après 2.a), $\underline{f = g}$.
• Si $c \in \mathbf{Q}$, on écrit $c = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$, alors l'intervalle $]0, \frac{1}{q}[$ est contenu dans $\mathbf{R} \setminus q(\mathbf{Z}^2)$. Donc, d'après 2.c) on peut avoir $f \neq g$.

PARTIE III. Un dernière exemple

1. (a) Soit réel $t \geq 0$. Considérons la fonction $\chi_t \ : \ y \longmapsto y + tu(y)$, définie sur *l'intervalle* $\mathbf{R}$; elle est *strictement croissante* et *continue*, elle réalise donc un homéomorphisme de $]-\infty, +\infty[$ sur $\chi_t(]-\infty, +\infty[)$. Mais u croissante donc $u(y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \leq +\infty$, donc $\chi_t(y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de même montre-t-on que χ_t admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$; donc $\chi_t(]-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$, et donc χ_t est un homéomorphisme[3] de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
Donc pour tout réel x, il existe un unique réel noté $a(t, x)$, tel que $x = a(t, x) + tu(a(t, x))$, c'est $\chi_t^{-1}(x)$.

   (b) Comme pour tout $(t, x) \in \mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}$,

$$x = a(t, x) + tu(a(t, x)),$$

par dérivation partielle,

$$0 = \partial_1 a(t, x) + u(a(t, x)) + tu'(a(t, x))\partial_1 a(t, x) \, ; \; 1 = \partial_2 a(t, x) + tu'(a(t, x))\partial_2 a(t, x),$$

et donc, puisque $1 + tu'(a(t, x)) \geq 1 > 0$:

$$\partial_1 a(t, x) = -\frac{u(a(t, x))}{1 + tu'(a(t, x))}, \ \partial_2 a(t, x) = \frac{1}{1 + tu'(a(t, x))}.$$

   (c) Par composition f est continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. De plus, pour $(t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, $\partial_1 f(t, x) = \frac{-u'(a(t,x))u(a(t,x))}{1+tu'(a(t,x))}$ et $\partial_2 f(t, x) = \frac{u'(a(t,x))}{1+tu'(a(t,x))}$. Donc $\partial_1 f + f \partial_2 f = 0$. De plus on a, par définition de a, $a(0, x) = x$, donc $f(0, x) = u(x)$.

   (d) Application :
Pour tout réel $t \geq 0$ et tout réel x, l'équation en y : $x = y + ty$, admet comme unique solution $\frac{x}{1+t}$ et donc $f(t, x) = \frac{x}{1+t}$ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$. Les applications $(t, x) \mapsto t$ ou x sont linéaires donc de classe $\mathcal{C}^1$. Les théorèmes de transfert assurent que f est continue et que sa restriction à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Le mot n'est pas au programme.

2. Soit g un élément de S_C. Soient (t_0, x_0) un point de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et

$$F_{x_0} = \Big\{(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0), t \in \mathbf{R}\Big\}.$$

(a) On aura reconnu en F_{x_0} la droite passant par (t_0, x_0) de pente $g(t_0, x_0)$.

(b) Soit l'application

$$\Phi \ : \ \mathbf{R}_+^* \,;\ t \mapsto g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0)).$$

Par les théorèmes de transfert, Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout réel $t > 0$,

$$\Phi'(t) = \partial_1 g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0)) + g(t_0, x_0)\partial_2 g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0)),$$

soit compte tenu de l'appartenance de f à S_C,

$$\Phi'(t) = -\partial_2 g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0))\Big(g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0)) - g(t_0, x_0)\Big).$$

Donc $\Phi - \Phi(t_0)$ est LA solution sur $\mathbf{R}_+^*$ du problème de Cauchy linéaire

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = -\partial_2 g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0))Y \,;\ Y(t_0) = 0,$$

c'est-à-dire l'application nulle.

Ainsi g est-elle constante sur $(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}) \cap F$.

3. (a) Montrer que pour tout réel $\tau > 0$, l'application de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto g(\tau, x)$ est croissante, on pourra noter cette application $g(\tau, \cdot)$.

(b) En déduire que que $g(0, \cdot)$ est croissante.

(c) En prenant pour u l'application $g(0, \cdot)$, exprimer g au moyen de u et de l'application a définie comme en 1.(a).