

DM n°5

Ce devoir est constitué de deux exercices et d'un problème (deux parties d'un devoir du concours Mines-Ponts). Un exercice facultatif a été ajouté pour les plus téméraires

EXERCICE I

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

1. Calculer I_2 et I_3 .
2. Donner la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
3. Donner un développement limité à l'ordre 2, en $\frac{1}{n}$ de I_n , lorsque n tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire une expression de la forme $I_n = a_0 + a_1 \frac{1}{n} + a_2 \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ($n \rightarrow \infty$)).
4. Exprimer pour tout entier naturel n , I_n comme la somme d'une série numérique.

EXERCICE II**Lemme de Lebesgue**

Soit $T \in \mathbf{R}_+^*$.

Soit h une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, T -périodique. On pose : $\langle h \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T h(t) dt$.

1. Montrer que pour tout réel x et tout entier n ,

$$\frac{1}{nT} \int_x^{x+nT} h(t) dt = \langle h \rangle.$$

2. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$ non réduit à un point. Montrer que

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3. Montrer que

$$\int_a^b f(t) h(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle h \rangle \int_a^b f(t) dt.$$

EXERCICE FACULTATIF**Théorème du relèvement**

Soit $\mathcal{U}$ le cercle unité de $\mathbf{C}$. On considère $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications de $\mathcal{U}$ dans $\mathbf{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire que $t \mapsto f(e^{it})$ est $\mathcal{C}^1$).

1. Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer qu'il existe une application θ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que pour tout réel t , $f(e^{it}) = e^{\theta(t)}$. Une telle application s'appelle relèvement de f .
2. Montrer que deux relèvements de f diffèrent d'une constante à préciser.

3. Soit θ un relèvement de f et t un réel. Montrer que la quantité

$$\frac{\theta(t + 2\pi) - \theta(t)}{i2\pi}$$

est un entier indépendant du choix de θ et de t . On le note $\text{Ind}(f)$ (indice de f).

4. Déterminer $\text{Ind}(f)$ dans les cas suivants :

(a) f est la fonction associée au monôme X^n .

(b) $f = f_1 \times f_2$, où f_1 et f_2 sont des éléments de $\mathcal{C}$.

(c) f est à valeur dans $\mathbf{C} - \mathbf{R}_-$.

5. Soient f_1 et f_2 des éléments de $\mathcal{C}$ tels que $|f_1(t) - f_2(t)| < |f_1(t)|$, pour tout réel t . Montrer que $\text{Ind}(f_1) = \text{Ind}(f_2)$

6. Montrer que l'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}$, Ind est continue.

7. Soit f un élément de $\mathcal{C}$ d'indice n . Déterminer le plus grand connexe par arcs contenant f .

PROBLÈME

Inégalité de Prékopa et Leindler

Notations.

On notera $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. On désignera par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$. Pour tous réels a et b on notera $a\mathcal{A} + b\mathcal{B}$ la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$a\mathcal{A} + b\mathcal{B} = \{ax + by, x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}\}.$$

En particulier, pour $a = -1$, on écrit $-\mathcal{A} = \{-x, x \in \mathcal{A}\}$.

Si f désigne une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée sur $\mathbb{R}$, alors on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Pour tout réel $\lambda > 0$, et tout réel $x > 0$ on note x^λ la quantité $\exp(\lambda \ln(x))$ et l'on convient que $0^\lambda = 0$.

Pour toute fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}_+$, tous $x \in I$ et $\lambda \in]0, 1[$, on écrira $f(x)^\lambda$ pour $(f(x))^\lambda$.

Partie I. Une inégalité de Prékopa et Leindler

1. Soient λ un réel dans l'intervalle $]0, 1[$, et a et b deux réels positifs. Montrer que

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \geq a^\lambda b^{1-\lambda}.$$

On pourra introduire une certaine fonction auxiliaire dont on justifiera la concavité. Montrer en outre que pour tout réel $u > 1$,

$$(\lambda a + (1 - \lambda)b)^u \leq \lambda a^u + (1 - \lambda)b^u.$$

2. Soient a et b deux réels positifs et λ un réel dans $]0, 1[$. Montrer que

$$(a + b)^\lambda \leq a^\lambda + b^\lambda.$$

Dans toute cette partie, λ est un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, et f, g, h sont des fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ intégrables qui satisfont l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}.$$

Le but de cette partie est de montrer l'inégalité suivante, à laquelle on fera référence par « inégalité de Prékopa et Leindler », ou en abrégé « P-L » :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \right)^{1-\lambda}. \quad (1)$$

Dans les questions 3, 4 et 5 on supposera de plus que f et g sont strictement positives, c'est-à-dire pour tout réel x , $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$.

3. On pose $F = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ et $G = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$. Montrer que pour tout t dans l'intervalle $]0, 1[$, il existe un unique réel noté $u(t)$ et un unique réel noté $v(t)$ tels que

$$\frac{1}{F} \int_{-\infty}^{u(t)} f(x) dx = t, \quad \frac{1}{G} \int_{-\infty}^{v(t)} g(x) dx = t.$$

On pourra étudier les variations de la fonction $u \mapsto \frac{1}{F} \int_{-\infty}^u f(x) dx$.

4. Montrer que les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, 1[$ et, calculer pour chaque $t \in]0, 1[$ les nombres dérivés $u'(t)$ et $v'(t)$.
5. Montrer que l'ensemble image de l'application w définie sur $]0, 1[$ par

$$\forall t \in]0, 1[, \quad w(t) = \lambda u(t) + (1 - \lambda)v(t)$$

est égal à $\mathbb{R}$, puis prouver que w définit un changement de variable de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$. En utilisant ce dernier et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(w) dw$, montrer que f, g et h satisfont l'inégalité P-L (1).

On pose $\Psi(u) = \exp(-u^2)$ pour tout réel u .

A partir de maintenant, on suppose que les fonctions f, g et h sont seulement à valeurs positives ou nulles.

6. Prouver que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda}.$$

Soit M un réel strictement positif. On suppose dans les questions 7, 8 et 9 que f et g sont nulles en dehors de l'intervalle $[-M, M]$. On pose $\Lambda = \min(\lambda, 1 - \lambda)$, $\Theta = \max(\lambda, 1 - \lambda)$ et $\widehat{M} = M \max(\lambda, 1 - \lambda)$. Pour chaque réel u , on pose :

$$\Psi_M(u) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\Theta^2} \left(|u| - \widehat{M}\right)^2\right), & \text{si } |u| > \widehat{M}, \\ 1, & \text{si } |u| \leq \widehat{M}. \end{cases}$$

7. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Prouver que si $|y| \leq M$, alors $\Psi(x) \leq \Psi_M(z)$. De même, prouver que si $|x| \leq M$ alors $\Psi(y) \leq \Psi_M(z)$.
8. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, $f_\varepsilon = f + \varepsilon \Psi$ et $g_\varepsilon = g + \varepsilon \Psi$. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x)^\lambda g_\varepsilon(y)^{1-\lambda} \leq h(z) + \varepsilon^\Lambda (\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda}) (\Psi_M(z))^\Lambda + \varepsilon \Psi(z),$$

où $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. On commencera par appliquer l'inégalité de la question 2, puis les deux questions précédentes. On rappelle que $f(x) = 0$ si $|x| > M$ et que $g(y) = 0$ si $|y| > M$.

9. En déduire que si f et g sont nulles en dehors d'un intervalle borné alors l'inégalité "P-L" est satisfaite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $\chi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction *continue* qui vaut 1 sur $[-n, n]$, qui vaut 0 sur $] -\infty, -n-1] \cup [n+1, +\infty[$ et qui est affine sur chacun des deux intervalles $[-n-1, -n]$ et $[n, n+1]$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda} \leq \chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

11. Montrer que l'inégalité "P-L" (1) est satisfaite (si on choisit d'utiliser le théorème de convergence dominée alors on vérifiera soigneusement que ses conditions de validité sont remplies).

Partie II. Fonctions log-concaves

Soit n un entier strictement positif. On dira qu'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ est log-concave si pour tout λ dans l'intervalle $]0, 1[$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}.$$

12. Soit $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Prouver alors que l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \exp(-N(x)^2)$$

est continue et log-concave sur $\mathbb{R}^n$. On pourra observer que la fonction $u \mapsto u^2$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.