Corrigé du problème du DM 5

Inégalité de Prékopa et Leindler.

D'après M. Cornilleau

Partie I. Une inégalité de Prékopa et Leindler.

1. • Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors l'inégalité à démontrer est évidente.
   Sinon, la concavité du logarithme (dérivée d'ordre 2 négative) veut que :

$$\ln(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqslant \lambda \ln(a) + (1-\lambda)\ln(b).$$

   D'où par croissance de l'exponentielle, l'inégalité proposée.
   soit $f_u : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^u \in \mathbb{R}$, défini avec la convantion de l'énoncé.la restriction de f_u Ã $\mathbb{R}_+^*$ est convexe car

$$\forall x > 0, f_u''(x) = u(u-1)x^{u-2} > 0.$$

   D'ou l'inégalité pour a et b non nuls et même pour a ou/et b nuls puisque f_u est continue.

2. Fixons $b \geqslant 0$ et étudions la fonction $f : a \in \mathbb{R}_+ \mapsto (a+b)^\lambda - (a^\lambda + b^\lambda) \in \mathbb{R}$. f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall a > 0, f'(a) = \lambda((a+b)^{\lambda-1} - a^{\lambda-1}).$$

   Puisque $\lambda - 1 < 0$, la fonction $x > 0 \mapsto x^{\lambda-1} \in \mathbb{R}$ est décroissante et donc pour tout $a > 0$, $f'(a) \leqslant 0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et puisque $f(0) = 0$, on a bien

$$(a+b)^\lambda \leqslant a^\lambda + b^\lambda.$$

3. Soit $\varphi : u \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{F}\int_{-\infty}^u f(x)dx = \frac{1}{F}\int_{-\infty}^0 f(x)dx + \frac{1}{F}\int_0^u f(x)dx$.
   f étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $\varphi' = \frac{1}{F}f > 0$, donc φ' ne s' annule pas.
   φ réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R})$ et la bijection réciproque est $\mathcal{C}^1$. De plus

$$\lim_{u\to-\infty}\varphi(u) = \frac{1}{F}\left(\int_{-\infty}^0 f(x)dx + \lim_{u\to-\infty}\int_0^u f(x)dx\right) = \frac{1}{F}\left(\int_{-\infty}^0 f(x)dx - \int_{-\infty}^0 f(x)dx\right) = 0,$$

$$\lim_{u\to+\infty}\varphi(u) = \frac{1}{F}\left(\int_{-\infty}^0 f(x)dx + \lim_{u\to+\infty}\int_0^u f(x)dx\right) = \frac{1}{F}\left(\int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx\right) = 1.$$

   Donc φ réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
   Posons $u = \varphi^{-1}$. Pour tout $t \in]0,1[$, et tout réel x, on $\frac{1}{F}\int_{-\infty}^x f(x)dx = \varphi(u(t)) = t$ si et seulement si $x = u(t)$.

   La preuve de l'existence de la fonction v est absolument identique (en raisonnant à partir de $\psi : v \mapsto \frac{1}{G}\int_{-\infty}^v g(x)dx$).

4. On a vu que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ de plus le théorème de la bijection $\mathcal{C}^1$ dit :

$$\forall t \in]0,1[,\ u'(t) = \frac{1}{\varphi'(u(t))} = \frac{F}{f(u(t))} > 0.$$

   On procède identiquement pour calculer v'. On obtient alors

$$\forall t \in]0,1[,\ v'(t) = \frac{1}{\psi'(v(t))} = \frac{G}{g(v(t))} > 0.$$

5. Les fonctions u et v sont donc strictement croissantes sur $]0,1[$.
   De plus, puisque $\lim\limits_{-\infty}\varphi = 0$, $\lim\limits_{+\infty}\varphi = 1$ et que $u = \varphi^{-1}$,

$$\lim_{t\to0} u(t) = -\infty,\ \lim_{t\to1} u(t) = +\infty.$$

   De manière identique, on a

$$\lim_{t\to0} v(t) = -\infty,\ \lim_{t\to1} v(t) = +\infty.$$

Puisque $w = \lambda u + (1-\lambda)v$, w est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0,1[$ dont la dérivée, $\lambda u' + (1-\lambda)v'$, ne s'annule pas car strictement positive, de plus

$$\lim_{t\to 0} w(t) = -\infty,\ \lim_{t\to 1} w(t) = +\infty$$

ce qui montre que w est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ (strictement croissante) de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$. Donc w définit un changement de variable admissible de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

On peut alors écrire, en utilisant ce changement de variables et l'hypothèse sur f, g, h,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = \int_0^1 h(w(t))w'(t)dt \geqslant \int_0^1 f(u(t))^\lambda g(v(t))^{1-\lambda} w'(t)dt.$$

D'autre part, d'après l'inégalité de la question 1, on a pour tout $t \in]0,1[$,

$$w'(t) = \lambda u'(t) + (1-\lambda)v'(t) \geqslant u'(t)^\lambda v'(t)^{1-\lambda} = \frac{F^\lambda}{f(u(t))^\lambda}\frac{G^{1-\lambda}}{g(v(t))^{1-\lambda}}$$

d'après l'expression de u' et v' obtenue à la question précédente.

En réinjectant cette inégalité dans l'intégrale, on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(w)dw \geqslant \int_0^1 F^\lambda G^{1-\lambda} dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx\right)^{1-\lambda},$$

ce qui démontre l'inégalité « P-L ».

6. La convexité de la fonction $x \mapsto x^2$ (cette fonction est deux fois dérivable et de dérivée seconde égale à $2 > 0$). assure que :

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leqslant \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2.$$

Donc

$$\Psi(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda}.$$

puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est un fonction strictement décroissante.

7. Supposons d'abord $|y| \leqslant M$.

Si $|z| \leqslant \hat{M}$ alors $\Psi(x) \leqslant 1 = \Psi(z)$.

Supposons $|z| > \hat{M}$. D'après l'inégalité triangulaire et la définition de $\Theta \leqslant 1$,

$$|z| \leqslant \Theta(|x| + |y|) \leqslant \Theta(|x| + M) = \Theta|x| + \hat{M}.$$

Soit $\Theta^2 x^2 \geqslant (|z| - \hat{M})^2$ par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, donc par décroissance stricte de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$,

$$\Psi(x) \leqslant \Psi_M(z).$$

En échangeant les rôles de x et y ainsi que ceux de λ et de $1-\lambda$, on en déduit que $\Psi(y) \leqslant \Psi_M(z)$ pour $|x| \leqslant M$.

8. Fixons $x, y \in \mathbb{R}$.

D'après la question 2, on a d'abord

$$f_\varepsilon(x)^\lambda g_\varepsilon(y)^{1-\lambda} = (f(x) + \varepsilon\Psi(x))^\lambda (g(y) + \varepsilon\Psi(y))^{1-\lambda} \leqslant (f(x)^\lambda + \varepsilon^\lambda \Psi(x)^\lambda)(g(y)^{1-\lambda} + \varepsilon^{1-\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda})$$

En développant et puisque $\varepsilon^\lambda \leqslant \varepsilon^\Lambda, \varepsilon^{1-\lambda} \leqslant \varepsilon^\Lambda$ (car $\varepsilon \in]0,1[$), on obtient donc

$$f_\varepsilon(x)^\lambda g_\varepsilon(y)^{1-\lambda} \leqslant f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \varepsilon^\Lambda(\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \Psi(y)^\lambda f(x)^{1-\lambda}) + \varepsilon\Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda}.$$

D'après la question 6, on a ensuite $\Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda} \leqslant \Psi(z)$ et par hypothèse sur f, g, h $\ f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \leqslant h(z)$. On a donc

$$f_\varepsilon(x)^\lambda g_\varepsilon(y)^{1-\lambda} \leqslant h(z) + \varepsilon^\Lambda(\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \Psi(y)^\lambda f(x)^{1-\lambda}) + \varepsilon\Psi(z).$$

De plus, si $|y| > M$, alors on a évidemment $\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \leqslant \|g\|_\infty^{1-\lambda}(\Psi_M(z))^\Lambda$

Supposons maintenant $|y| \leqslant M$, on a d'après la question précédente $\Psi(x) \leqslant \Psi_M(z)$ et donc

$$\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \leqslant \|g\|_\infty^{1-\lambda}(\Psi_M(z))^{1-\lambda} \leqslant \|g\|_\infty^{1-\lambda}(\Psi_M(z))^\Lambda$$

puisque $\Psi_M(z) \in [0,1]$.

De la même manière, on montre que $\Psi(y)^{1-\lambda} f(x)^\lambda \leqslant \|f\|_\infty^\lambda (\Psi_M(z))^\Lambda$.

L'inégalité voulue est donc bien démontrée.

9. On applique la question 5 avec les fonctions $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ et $h_\varepsilon = h + \varepsilon^\Lambda(\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda})\Psi_M^\Lambda + \varepsilon\Psi$.

   Puisque f_ε et g_ε sont strictement positives et Ψ, Ψ_M^Λ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (car négligeables devant $x \mapsto x^{-2}$ en l'infini), on a ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x)dx \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x)dx\right)^{1-\lambda}. \tag{1}$$

   De plus, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx.$$

   D'autre part,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)dx + \varepsilon^\Lambda(\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda}) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_M(x)^\Lambda dx$$

   et, puisque $\Lambda > 0$, on a aussi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx.$$

   En passant à la limite dans (1), on obtient bien l'inégalité « P-L ».

10. Fixons $x, y \in \mathbb{R}$.

    Si x et y appartiennent à l'intervalle $[-n-1, n+1]$, l'inégalité est bien vérifiée (puisque $\chi_n(x) \leqslant 1$ et $\chi_n(y) \leqslant 1$ et qu'alors $\chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1$).

    Sinon, on a en particulier $\chi_n(x) = 0$ ou $\chi_n(y) = 0$ et l'inégalité est immédiatement vérifiée.

11. Posons $f_n = f\chi_n, g_n = g\chi_n$ et $h_{n+1} = g\chi_{n+1}$. Ces fonctions sont nulles en dehors de l'intervalle $[-n-2, n+2]$

    Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in]0,1[$.

    On a d'abord $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$ et $\chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda}$ d'après la question précédente.

    En multipliant ces inégalités entre nombres positifs, on a donc

$$h_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f_n(x)^\lambda g_n(y)^{1-\lambda}.$$

    On applique maintenant la question 9 qui nous fournit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{n+1}(x)dx \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx\right)^{1-\lambda}. \tag{2}$$

    On a d'abord $\chi_n(x) \to 1$ pour tout x réel. Ainsi $f_n(x) \to f(x), g_n(x) \to g(x), h_{n+1}(x) \to h(x)$ quel que soit le réel x.

    D'autre part, puisque $0 \leqslant \chi_n \leqslant 1$, on a $|f_n| \leqslant |f|, |g_n| \leqslant |g|$ et $|h_{n+1}| \leqslant |h|$.

    Puisque $|f|, |g|$ et $|h|$ sont des fonctions intégrables, les hypothèses d'application du théorème sont vérifiées donc

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \quad \lim_{n\to\infty} \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$$

    et

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{n+1}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx.$$

    En passant à la limite dans l'inégalité (2), on obtient bien l'inégalité « P-L ».