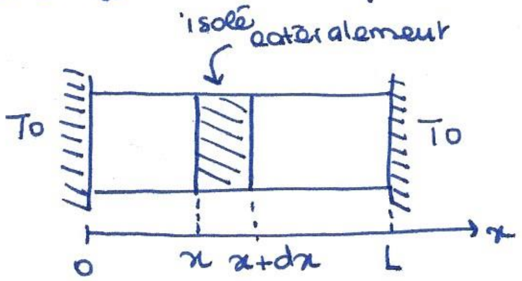
2. Diffusion thermique et courant électrique. MT



1. On suppose que $T=T(x)$. Par la loi de Fourier :

$$\vec{j_Q} = -\lambda \,\overrightarrow{\text{grad}}\, T = -\lambda \frac{dT}{dx}\vec{e_x} = j_Q(x)\,\vec{e_x}$$

On applique le 1er principe à la tranche $x, x+dx$ entre t et $t+dt$. Pas de variation d'énergie interne car le régime est stationnaire

Il existe $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2}\vec{e_x}$ dans le fil et $\vec{E} = \frac{1}{\gamma}\vec{j} = \frac{I}{\gamma \pi a^2}\vec{e_x}$.

$$\underbrace{d(\delta U)}_{=0} = j_Q(x)\pi a^2 dt - j_Q(x+dx)\pi a^2 dt + \underbrace{\vec{j}.\vec{E}\,\pi a^2 dx dt}_{\text{terme source}} = 0$$

donc $-\frac{dj_Q}{dx}\pi a^2 dt\,dx + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{I}{\pi a^2}\right)^2 \pi a^2 dx dt = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{I}{\pi a^2}\right)^2 = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda\gamma}\frac{I^2}{\pi^2 a^4}}$$

On intègre :

$$T(x) = -\frac{1}{2\lambda\gamma}\frac{I^2}{\pi^2 a^4}x^2 + Ax + B \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes}$$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(0) = T_0 = B \\ T(L) = T_0 = -\frac{1}{2\lambda\gamma}\frac{I^2}{\pi^2 a^4}L^2 + AL + T_0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2\lambda\gamma}\frac{I^2}{\pi^2 a^4}L$$

$$\boxed{T(x) = -\frac{1}{2\sigma\lambda}\frac{I^2}{\pi^2 a^4}(x^2 - Lx) + T_0}$$

2. On résout : $\frac{dT}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2x - L = 0$ donc $\boxed{x = \frac{L}{2}}$ Température maximale au milieu du fil.

$$\boxed{T_{max} = +\frac{1}{8\lambda\gamma}\frac{I^2}{\pi^2 a^2}L^2 + T_0 > T_0}$$