

5. Physique statistique. MT

1. La probabilité d'occuper le niveau d'énergie E_k , $k=1,2$ ou 3 est donnée par la loi de Boltzmann :

$$P(E_k) = C e^{-\beta E_k} \text{ avec } \beta = \frac{1}{k_B T} \text{ et } C : \text{constante.}$$

La normalisation de la probabilité conduit à :

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1 \Rightarrow C (e^{-\beta e} + 1 + e^{\beta e}) = C (1 + 2\cosh(\beta e)) = 1$$

donc

$$C = \frac{1}{1 + 2\cosh(\beta e)}$$

on a donc :

$$P(E_1) = \frac{e^{-\beta e}}{1 + 2\cosh(\beta e)} ; P(E_2) = \frac{1}{1 + 2\cosh(\beta e)} \text{ et } P(E_3) = \frac{e^{\beta e}}{1 + 2\cosh(\beta e)}$$

On en déduit :

$$N_1 = N P(E_1) ; N_2 = N P(E_2) \text{ et } N_3 = N P(E_3)$$

2. U est la valeur moyenne de l'énergie totale des N particules. Comme elles sont indépendantes on obtient :

$$U = N_1 e + N_2 \times 0 + N_3 \times (-e)$$

$$= (N_1 - N_3) e \text{ donc}$$

$$U = N e \frac{e^{-\beta e} - e^{\beta e}}{1 + 2\cosh(\beta e)} = -2Ne \frac{\sinh(\beta e)}{1 + 2\cosh(\beta e)}$$

3. Par définition :

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{dU}{dT} = \frac{dU}{d\beta} \frac{d\beta}{dT} = -\frac{1}{k_B T^2} (-2Ne) \frac{\beta \cosh(\beta e) (1 + 2\cosh(\beta e)) - 2\beta^2 \sinh^2(\beta e)}{(1 + 2\cosh(\beta e))^2} \\ &= \frac{2Ne}{k_B T^2} \frac{\cosh(\beta e) + 2}{(1 + 2\cosh(\beta e))^2} \end{aligned}$$