6. Oscillateur harmonique quantique. MT

1. Système masse ressort. Toute particule avec des petits mouvements autour de sa position d'équilibre stable (en l'absence d'effet dissipatifs)

2. $\varphi(x)$ est solution de :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + \frac{1}{2}m x^2 \omega^2 \varphi(x) = E\,\varphi(x) \qquad (1)$$

or $\varphi'(x) = (-2\alpha x)\,A e^{-\alpha x^2} = -2\alpha x\,\varphi(x)$

$$\varphi''(x) = -2\alpha\,\varphi(x) - 2\alpha x\,\varphi'(x) = -2\alpha\,\varphi(x) + 4\alpha^2 x^2\,\varphi(x)$$

Par substitution dans (1) on obtient :

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2m}2\alpha + \left(\frac{1}{2}m\omega^2 - \frac{\hbar^2}{2m}4\alpha^2\right)x^2\right\}\varphi(x) = E\,\varphi(x) \quad \underline{\underline{\forall x}}$$

Cette équation devant être réalisée pour <u>toute</u> valeur de x, on a nécessairement :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 - \frac{\hbar^2}{2m}4\alpha^2 = 0 \\ \frac{\hbar^2}{m}\alpha = E \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 = \frac{m^2\omega^2}{4\hbar^2} \\ E = \frac{\hbar^2}{m}\alpha \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \alpha = \frac{m\omega}{2\hbar} \\ E = \frac{1}{2}\hbar\omega \end{cases}}$$

3. Il faut normaliser la probabilité de présence de la particule :

$$\Psi_{stat}(x,t) = \varphi(x)\,e^{-iEt/\hbar} \Rightarrow |\Psi_{stat}|^2 = |\varphi(x)|^2 \text{ et}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,dx = 1 = A^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\alpha x^2}\,dx$$

On peut poser : $u = \sqrt{2\alpha}\,x$
$du = \sqrt{2\alpha}\,dx$

donc : $$\frac{A^2}{\sqrt{2\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\,du = 1 \iff \frac{A^2}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{\pi} = 1$$

donc $$\boxed{A = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}}$$