TD n° 23 de Physique
Statique des fluides

Applications directes du cours

1 Mélange de liquides dans un tube

Un élève tient un tube en U contenant de l'eau, jusqu'à une hauteur $H = 10\,\mathrm{cm}$ depuis le fond du tube. La section est $s = 1\,\mathrm{cm}^2$. Il ajoute $2\,\mathrm{cm}^3$ d'huile dans une branche du tube. On sait que $\rho_{\mathrm{huile}} = 0{,}6\,\rho_{\mathrm{eau}}$.
À quelle hauteur se trouve l'interface entre l'eau et l'huile ? À quelle hauteur se trouve la surface libre de l'eau dans l'autre branche ?

2 Flottaison

Un navire de masse 3000 t et de volume $5000\,\mathrm{m}^3$ est placé dans une cale sèche de longueur 50 m, de largeur 20 m et de hauteur 6 m.
Quel volume d'eau doit-on faire entrer dans la cale pour que le navire puisse flotter et que le niveau d'eau soit à 1 m du rebord de la cale ?

3 Étalonnage d'un baromètre

Dans le modèle de l'atmosphère isotherme appliqué à l'air, calculer la pression $p(z)$ à une altitude $z = 100\,\mathrm{m}$ au dessus du niveau de la mer, à 0 °C. Exprimer la différence de pression $\Delta p = p_0 - p(z)$ en millimètres de mercure. Conclure sur l'intérêt de l'étalonnage d'un baromètre.

4 Remontée d'un plongeur

On suppose que la température de l'air contenu dans les poumons est de 37 °C. Un plongeur, à 10 m de profondeur, a des poumons dont le volume est 3 L. Quel volume d'air cela représente quand il arrive à la surface ? Que doit-il faire lors de sa remontée ?

Exercices

1 Atmosphère polytropique

Le modèle de l'atmosphère isotherme vu en cours n'est en réalité valable que dans la stratosphère, $z \in [11\,\mathrm{km}, 25\,\mathrm{km}]$. La troposphère, $z \in [0\,\mathrm{km}, 11\,\mathrm{km}]$, est avec une très bonne approximation considérée comme un gaz parfait qualifié de polytropique, c'est-à-dire obéissant à la loi $P\,\rho^{-k} = \mathrm{cte}$, avec $k = 1{,}2$. On note T_0 la température au niveau du sol.

1. Déterminer une loi entre T, P et k de la forme $\mathrm{f}(T,P) = \mathrm{cte}$.
2. Déterminer l'équation différentielle reliant T et z. On pourra utiliser la différentielle logarithmique de l'expression obtenue précédemment.
3. Résoudre cette équation.
4. On note α le gradient thermique de la troposphère : $\alpha\,\overrightarrow{u_z} = -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\,\overrightarrow{u_z}$.
En déduire α en fonction de M, g, k et R. Effectuer l'application numérique.
5. Trouver la loi $P(z)$ en notant P_0 la pression au sol.
6. Rappeler l'expression de la pression et de la température cinétiques.
7. En déduire la loi $n^\star(z)$ en notant $n^\star_0$ sa valeur au sol.

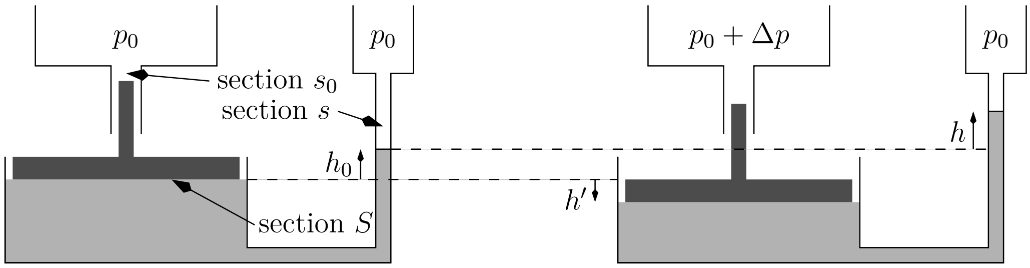
2 Ballon sonde

Un ballon sonde, de masse m (sans gaz), sert à emmener à haute altitude un appareillage en vue d'effectuer des mesures. L'enveloppe du ballon contient n_0 moles de dihydrogène considéré comme un gaz parfait. On suppose que durant toute la lente ascension, pression et température internes sont égales aux externes.
La pression atmosphérique au niveau du sol est $P_0 = 1\,\text{bar}$. On note V le volume de l'enveloppe du ballon, c'est-à-dire le volume de H_2.

1. Rappeler la masse molaire de l'air.
2. L'atmosphère est considérée isotherme, $T_0 = 290\,\text{K}$. Trouver la loi de variation de la pression en fonction de l'altitude z. Exprimer et calculer la hauteur caractéristique H qui apparaît.
3. Quelle est la force ascensionnelle F_z (somme de toutes les forces) ressentie par le ballon en fonction des masses molaires, m, n, g ?
4. Évaluer la quantité de matière n_{min} assurant le décollage de celui-ci pour $m = 54\,\text{kg}$, puis le volume V_{min} correspondant au sol.
5. Le volume du ballon est contraint de rester inférieur à une valeur maximale (qui pourrait le faire éclater) V_{max}. Déterminer l'altitude maximale z_1 que le ballon peut atteindre en fonction de H, V_{min}, V_{max}, n_{min} et n_0. Réaliser l'application numérique pour $V_{\text{max}} = 100\,\text{m}^3$ et $n_0 = 3000\,\text{mol}$.
6. En réalité, au delà de cette valeur maximale, le volume reste constant grâce à une soupape. Déterminer la nouvelle altitude maximale z_2 que le ballon peut atteindre en fonction de H, V_{min} et V_{max}. Réaliser l'application numérique.

3 Manomètre différentiel

On considère un manomètre différentiel composé d'un piston de masse m, mesurant la différence de pression entre deux réservoirs d'air, comme indiqué ci-dessous.



1. Exprimer le déplacement h du niveau de liquide en fonction de la variation de pression Δp, de la masse volumique de l'eau ρ, de g ainsi que des différentes sections.
2. Dans le cas d'un manomètre classique (tube en U), quelle est la relation reliant le déplacement h et la différence de pression Δp entre les deux extrémités du tube ? Lequel de ces deux appareils est le plus précis ?

4 Calcul direct des forces de pression sur un bol

Un bol hémisphérique de rayon R est posé, renversé, sur une surface plane. L'air au-dessus du bol est à la pression atmosphérique constante P_0. Le vide est réalisé sous le bol (comme s'il s'agissait d'une ventouse).

1. Montrer que la force de pression s'exerçant sur le bol a pour norme $\pi R^2 P_0$.

Le bol, cette fois rempli d'air à la pression atmosphérique P_0, est posé au fond d'un évier. On remplit l'évier d'eau (masse volumique ρ constante) jusqu'à ce que l'eau recouvre tout juste le bol resté sur le fond.

2. Montrer que la force de pression s'exerçant sur le bol a pour norme $\dfrac{1}{3}\pi R^3 \rho\, \text{g}$.

Enfin, on perce ce bol à son sommet. On le place, toujours renversé, sur une table horizontale, et on le remplit progressivement d'eau.

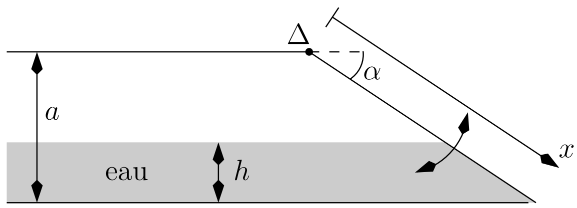
3. Quelle masse doit-il avoir pour se soulever précisément lorsque l'on a une hauteur h d'eau dans le bol ? On prendra pour l'application numérique $h = 10\,\text{cm}$.

5 Pression au centre de la Terre

La Terre est supposée être constituée d'un fluide de masse volumique uniforme ρ. Dans cette hypothèse, le champ de gravitation $\vec{g}$ à l'intérieur de la Terre est radial et sa norme varie de manière linéaire avec la distance au centre O de la Terre (ce résultat sera établi en deuxième année).

1. Exprimer explicitement le champ de gravitation $\vec{g}(M)$ en fonction de la distance $r = OM$, du rayon terrestre R et du champ de gravitation $\vec{g_0}$ à la surface.
2. De quelle(s) variable(s) dépend le champ de pression à l'intérieur de la Terre ?
3. En supposant la relation de la statique des fluides valable dans cette situation, trouver une équation différentielle satisfaite par la pression.
4. La résoudre connaissant la pression à la surface.
5. En déduire la pression P_c au centre de la Terre.
6. Faire l'application numérique sachant que $g_0 \approx 10\,\text{m·s}^{-2}$, $R = 6400\,\text{km}$ et que la masse de la Terre est $M = 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$. Commenter, sachant que la valeur communément admise est $P_\text{c} \approx 350\,\text{GPa}$.

6 Ouverture d'un clapet



On considère une canalisation rectangulaire horizontale de hauteur a et de largeur b, terminée par un clapet qui forme, lorsqu'il est fermé, un angle α avec l'axe de la canalisation. Le clapet, homogène et de masse m, et tenu par une liaison pivot idéale autour de son arête supérieure Δ.
La conduite est occupée par de l'eau de masse volumique ρ sur une hauteur h. La surface de l'eau, comme l'extérieur du clapet, est à la pression P_0.

1. Déterminer la pression de l'eau en un point du clapet repéré par la position x.
2. Montrer que le moment résultant par rapport à Δ exercé par les forces de pression sur le clapet s'écrit

$$\mathcal{M}_\Delta = \frac{\rho\, g\, b\, (3\,a - h)\, h^2}{6\, \sin^2 \alpha}$$

3. Quelle condition doit vérifier m pour que le clapet s'ouvre uniquement si $h > \dfrac{a}{2}$?