Chapitre 1 : Complément sur les séries numériques

Thibaud Lemanissier

2024-2025

PC Lycée Carnot

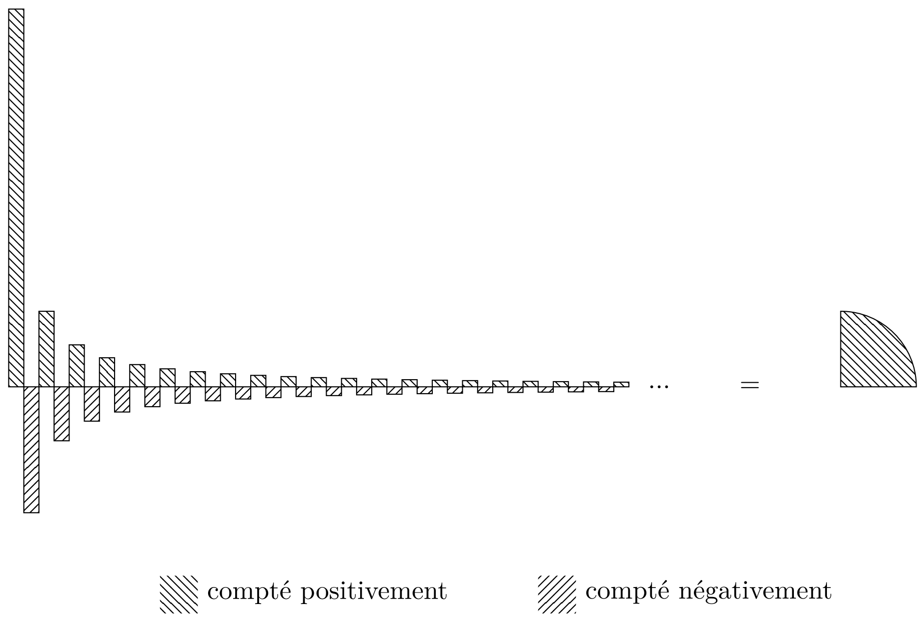


FIGURE 1 – Formule de Madhava-Leibniz $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition et premiers exemples

1.1 Défintion de série convergente

Définition 1.1 : Convergence d'une série

Une **série** ou **série numérique** est une somme $\sum u_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient à $\mathbb{K}$.
On appelle la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le **terme général de la série** $\sum u_n$.
On appelle **suite des sommes partielles** de la série $\sum u_n$ la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$.
Nous dirons qu'une série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Nous dirons qu'une série est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Remarque

En général la suite (u_n) n'est pas définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais à partie d'un rang $n \geqslant n_0$. Dans ce cas les sommes partielles ne sont définie que pour $N \geqslant n_0$ et sont égales à $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$.

Définition 1.2 : Reste d'une série

Soit $\sum u_n$ une <u>série convergente</u>. Sa **somme** est noté $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on appelle **N-ième reste** la somme $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n$.

Remarques

1. Une fois de plus, en général, la suite (u_n) n'est pas définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais à partie d'un rang $n \geqslant n_0$. Dans ce cas la somme est noté $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n$.
2. Il ne faut pas confondre la série $\sum u_n$ et la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Le premier s'apparente à une suite le deuxième est un scalaire.

Proposition 1.3 :

Soit $\sum u_n$ une série convergente. La suite des restes tend vers 0.

1.2 Série géométrique et sommes télescopiques

Un premier exemple de série dont sait déterminer si elle converge ou non, est donné par les séries géométriques.

Définition 1.4 : Série géométrique

Soit $q \in \mathbb{K}$. La série **géométrique de raison** q est la série $\sum q^n$.

Proposition 1.5 : Somme partielle d'une série géométrique

Soit $q \in \mathbb{K}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

— si $q = 1$: $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} q^n = N + 1$;

— si $q \neq 1$: $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$.

Cette proposition permet de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série géométrique converge.

Corollaire 1.6 : Convergence d'une série géométrique

Soit $\sum q^n$ une série géomtrique avec $q \neq 1$.
La série $\sum q^n$ est convergente si, et seulement si, $|q| < 1$. De plus, si elle est convergente, on a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = q^{n_0} \frac{1}{1-q}$$

Donc en particulier,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} q^n = \frac{q^{N+1}}{1-q}$$

Un deuxième exemple de séries dont on peut déterminer la convergence est donné par les séries télescopiques.

Proposition 1.7 : Série télescopique

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de $\mathbb{K}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum a_{n+1} - a_n$ est convergente.

De plus, s'il y a convergence, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n - a_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} - a_n$.

Exercice

Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ est convergente et calculer sa somme.

La propriété suivant permet démontrer rapidement la divergence de certaine série.

Proposition 1.8 : Série grossièrement divergente

Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
Donc si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ est divergente. Nous dirons que $\sum u_n$ est **grossièrement divergente**.

Attention !

On peut par exemple remarquer que la série $\sum \frac{1}{n+1}$ est divergente.

Pour montrer cela nous allons procéder par l'absurde. Supposons que cette série est convergente. Les deux suites de sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ sont donc convergentes et ont même limite. Donc la suite $(S_{2N}-S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Or pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{2N}-S_N=\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{1}{n+1}\geqslant\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{1}{2N}=\frac{1}{2}$$

Donc la suite $(S_{2N}-S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers 0. Ainsi, la série $\sum \frac{1}{n+1}$ est divergente. On appelle cette série la **série harmonique**. La somme croit très lentement $S_{10^{43}}\leqslant 100$.

2 Séries à termes positifs

2.1 Quelques critères de convergences

Dans le cas où la série est à termes réels positifs, on a plusieurs critères de convergence pour ramener l'étude de la convergence aux séries usuelles, c'est-à-dire les séries géométriques ou de Riemann. Nous rappelons les trois critères principaux de convergence :

Exemples

Pour montrer la convergence (resp.divergence) d'une série à termes positifs, on peut utiliser le :

1. **critère de comparaison,** qui consiste à majorer (resp. minorer) le terme général par celui d'une série positive convergente (resp. divergente) :

   On considère la série $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

   On remarque que pour $n\geqslant 1$, on a $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\geqslant 0$.

   On remarque aussi que pour tout $n\geqslant 3$, $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$. Or la série $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. Donc par critère de comparaison, la série $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ est divergente.

2. **critère du petit o,** qui consiste à montrer que le terme général est un petit o de celui d'une série positive convergente (resp. qu'un petit o du terme général est le terme général d'une série divergente) :

   On considère la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$.

   On remarque que pour $n\geqslant 1$, on a $\frac{\ln(n)}{n^3}\geqslant 0$.

   On remarque aussi que $\frac{\ln(n)}{n^3}=\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Donc par critère de petit o, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

3. **critère d'équivalence,** qui consiste à montrer que le terme général est équivalent à celui d'une série positive convergente (resp. divergente) :

   On considère la série $\sum\left(\frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}}\right)$.

   On remarque que pour tout $n\geqslant 1$, $\frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}}\geqslant 0$.

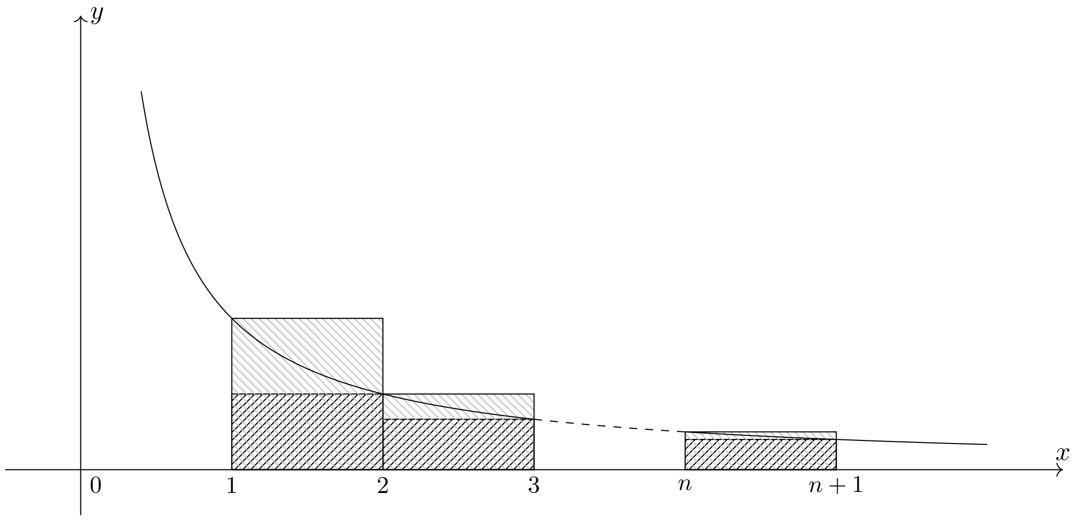
   On remarque aussi que $e^{1/n}-1\sim\frac{1}{n}$. D'où $\frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{n^{3/2}}$. Or la série $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente. Donc la série $\sum\left(\frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente.

2.2 Comparaison séries-intégrales

Lorsque le terme général d'une série est de la forme $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et décroissante, on peut comparer la suite des sommes partielles avec une suite d'intégrales grâce à la remarque suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant f(n+1).$$

Le schéma suivant permet de mieux visualiser le théorème.



Théorème 2.1 : Critère de convergence par comparaison séries-intégrales

Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante.
Pour tout $n > m \geqslant n_0$, on a :

$$f(m) + \int_m^n f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=m}^{n} f(k) \geqslant \int_m^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t$$

En particulier, la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\geqslant n_0}$ est convergente.

Ce théorème est utilisé dans le cas où les intégrales sont plus simple à estimer que les sommes partielles.

Exercice

On considère la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

1. Déterminer un encadrement des sommes partielles.
2. En déduire que la série est divergente.
3. Monter que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ est équivalent à $\ln(\ln(n))$.

Une très importantes conséquences de la comparaison série-intégrale est le corollaire suivant :

Corollaire 2.2 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2.3 Règle de d'Alembert

En plus des critères de convergence rappelé précédemment, la proposition suivante est un critère de convergence des séries à termes positifs qui peut être une généralisation le critère pour qu'une série géométrique converge :

Proposition 2.3 : règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

1. Si $\ell < 1$, alors la série est convergente.
2. Si $\ell > 1$, alors la série diverge grossièrement.

Attention !

1. On ne peut rien conclure dans le cas où $\ell = 1$.
   (a) On a vu que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Or
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
   (b) On a aussi vu que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Or
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
2. On prendra bien garde à montrer que le terme général est **strictement** positif. Pour éviter de faire une division par 0 (se qui fait toujours mauvais genre).

Ce critère est souvent très utile lorsqu'il y a des factoriels ou des termes géométrique dans le terme général.

Exercice

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n n!}{n^n}$.

3 Séries absolument convergentes

3.1 Définition et premières propriétés

Pour pouvoir utiliser les critères de convergence sur les séries à termes positifs dans un cadre plus général, nous utilisons la notion de série absolument convergente.

Définition 3.1 :

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes. Nous dirons que la série **converge absolument** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Cette notion permet bien de montrer qu'une série est convergente.

Proposition 3.2 :

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes. Si la série est absolument convergente, alors elle est convergente.

Attention !

La proposition précédente n'est pas une équivalence, nous verrons plus tard que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente, or la série $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \sum \frac{1}{n+1}$ est divergente.

Les séries qui sont convergentes mais qui ne sont pas absolument convergente sont dites **semi-convergente**.

Exemple

On considère la série $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| = \frac{|\cos(n)|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Donc par critère de comparaison, la série $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$ est absolument convergente. En particulier, elle est convergente.

Proposition 3.3 : Inégalité triangulaire

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. On a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Exercice

Déterminer pour quel nombre complexe a la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ est absolument convergente.

3.2 Produit de Cauchy

Définition 3.4 : Produit de Cauchy

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Le **produit de Cauchy** de ces deux séries est la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k+l=n} u_k v_l.$$

Remarque

Lorsque les deux séries sont indexées à partir de 0, la somme $\sum_{k+l=n} u_k v_l$ peut encore s'écrire $\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Cependant, si elles sont indexées à partir de 1, le terme w_n n'est défini qu'à partir de $n = 2$ et $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k v_{n-k}$.

Proposition 3.5 : Produit de Cauchy absolument convergente

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy l'est aussi et on a l'égalité :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

On peut reformuler la proposition de la manière suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} u_k u_l = \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k u_l = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k+l=n} u_k v_l$$

Voici une représentation de la façon dont on calcule chacune des sommes :

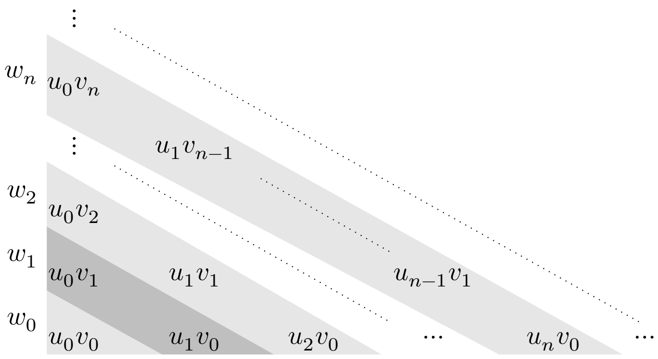
Pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} u_k u_l$:

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
u_0v_l	u_1v_l	u_2v_l	$\cdots$	u_kv_l	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
u_0v_1	u_1v_1	u_2v_1	$\cdots$	u_kv_1	$\cdots$
u_0v_0	u_1v_0	u_2v_0	$\cdots$	u_kv_0	$\cdots$

Pour calculer $\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k u_l$:

$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
u_0v_l	u_1v_l	$\cdots$	u_kv_l	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
u_0v_2	u_1v_2	$\cdots$	u_kv_2	$\cdots$
u_0v_1	u_1v_1	$\cdots$	u_kv_1	$\cdots$
u_0v_0	u_1v_0	$\cdots$	u_kv_0	$\cdots$

Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k+l=n} u_k v_l$:



Attention !

L'hypothèse absolument convergente est importante. Par exemple, si l'on considère le cas où $\sum u_n = \sum v_n = \sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont alternées donc convergentes. Cependant, on a l'égalité $w_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$, on peut montrer par une étude de fonction que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,, \quad \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant \frac{1}{n/2+1} = \frac{2}{n+2},$$

donc $|w_n| \geqslant \dfrac{2(n+1)}{n+2}$ et donc en particulier la série est grossièrement divergente.

Exercice

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégrale que $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{(ib)^n}{n!}$ sont convergentes et que leur somme vaut e^a et e^{ib}.
2. Calculer le produit de Cauchy de ces deux séries.

4 Quelques exemples en plus

4.1 Séries alternées

Le théorème suivant permet de montrer que certaine série qui ne sont pas absolument convergente sont convergentes.

Théorème 4.1 : Séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite réelle décroissante convergent vers 0.
La série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente. Des plus, si on note S sa somme, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{2p+1}(-1)^n u_n \leqslant S \leqslant \sum_{n=0}^{2p}(-1)^n u_n$$

Remarque

L'encadrement de la fin du théorème implique en particulier que :

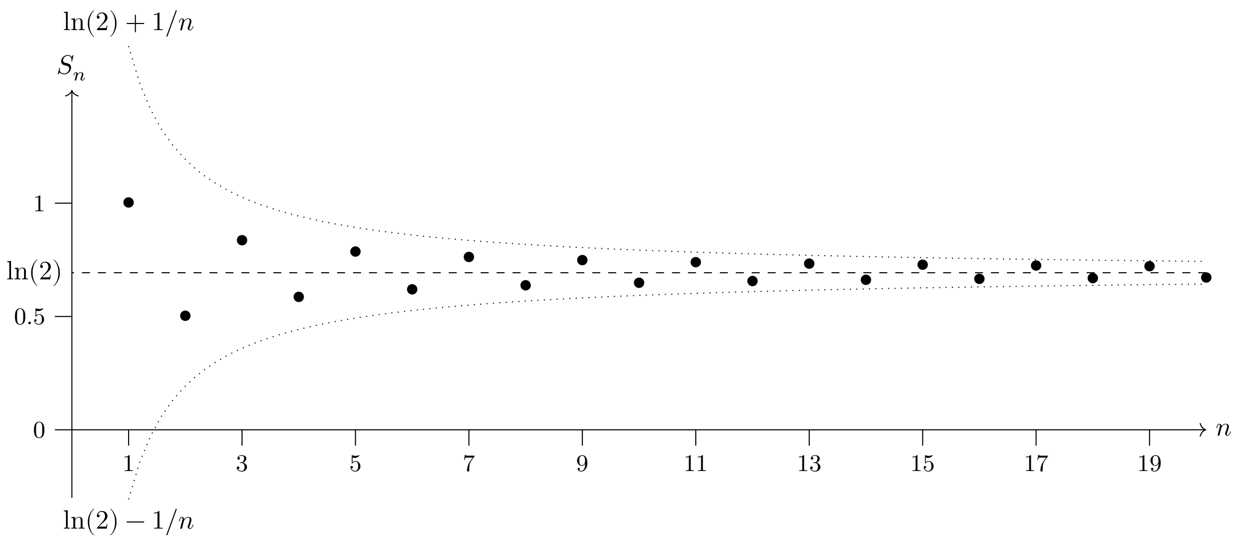
$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n u_n - S\right| \leqslant u_N$$

Cette majoration permet en particulier de déterminer facilement combien de termes de la somme il suffit de calculer pour avoir une approximation de la somme $\varepsilon > 0$. Il suffit de prendre le plus petit N tel que $u_N \leqslant \varepsilon$.

Exemple

D'après le théorème des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente, alors qu'elle n'est pas absolument convergente. On montrera qu'elle converge vers $\ln(2)$.

Le schéma suivant représente les 20 premières sommes partielles avec la limite et l'encadrement donné permettant d'estimer la vitesse de convergence.



Attention !

L'hypothèse de décroissance est importante ! Par exemple, on peut montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ est divergente. En effet, on peut remarquer que :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}n} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}n}\right).$$

Or la série de terme général $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente par le théorème des séries alternées, les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}n}\right)$ sont absolument convergentes et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ est bien divergente.

Exercice

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ est convergente.

4.2 Formule de Stirling

En plus des équivalents usuels, il peut-être utile d'avoir un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$. Pour cela on la proposition suivante :

Proposition 4.2 : Formule de Stirling

On a :

$$n! \equiv +\infty\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

La démonstration de cette proposition est très classique (mais non exigible). Nous la ferons sous la forme d'un exercice.

Exercice

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\sqrt{n}n^n}{n!\mathrm{e}^n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

1. Commençons par montrer une version plus faible.
   (a) Montrer que la suite v_n est convergente en utilisant les sommes télescopiques.
   (b) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \equiv +\infty C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ (formule obtenue dans un premier temps par Moivre).
2. Montrons que la constante C vaut $\sqrt{2\pi}$ à l'aide des intégrales de Wallis.
   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Monter que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.
   (b) En déduire que $(W_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivantes.
   (c) Déduire de la première question que pour tout $p \in \mathbb{N}$:
   $$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\binom{2p}{p}\frac{1}{4^p} \qquad \text{et} \qquad W_{2p+1} = \frac{1}{2p+1}\frac{4^p}{\binom{2p}{p}}.$$
   (d) Monter que la constante C de la formule de Moivre vaut $\sqrt{2\pi}$ ce qui nous donne la formule de Stirling.

En représentant en échelle logarithmique $n!$ et $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ on obtient le graphe suivant qui suggrère que la formule de Stirling est une excellente approximation.