Chapitre 2 : Complément d'algèbre linéaire

Thibaud Lemanissier

2024-2025

PC Lycée Carnot

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & 0 & 0 & \boxed{A_{14}} \\ \boxed{A_{21}} & 0 & \boxed{A_{23}} & 0 \\ \boxed{A_{31}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{A_{42}} & 0 & \boxed{A_{44}} \end{pmatrix} \quad \xleftrightarrow{E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4}$$

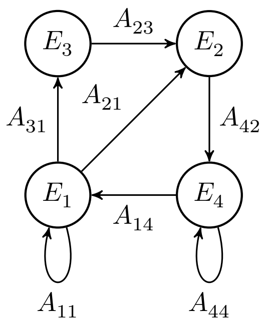


Figure 1 – Matrice définie par blocs et traduction en terme de sous-espaces

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Produit d'espaces vectoriels et somme de sous-espaces vectoriels

À partir d'une famille finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel nous pouvons construire un nouveau $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.1 : Produit d'espace vectoriel

Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On définit l'**espace vectoriel produit** comme l'ensemble

$$E_1 \times \dots \times E_p = \{(v_1, \dots, v_p),\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ v_i \in E_i\}$$

muni d'une opération externe

$$\begin{array}{cccc} \cdot.\cdot : & \mathbb{K} \times (E_1 \times \dots \times E_p) & \to & E_1 \times \dots \times E_p \\ & (\lambda, (u_1, \dots, u_p)) & \mapsto & (\lambda u_1, \dots, \lambda u_p) \end{array}$$

et d'une opération interne

$$\begin{array}{cccc} \cdot + \cdot : & (E_1 \times \dots \times E_p) \times (E_1 \times \dots \times E_p) & \to & E_1 \times \dots \times E_p \\ & ((u_1, \dots, u_p), (v_1, \dots, v_p)) & \mapsto & (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_p) \end{array}$$

Comme la terminologie le suggère fortement, on a la proposition suivante :

Proposition 1.2 :

Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'espace vectoriel produit $E_1 \times \dots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Dans le cas où les espaces vectoriels sont de dimension finies, on peut calculer la dimension du produit à partir des dimensions des espaces vectoriels.

Proposition 1.3 : Dimension d'un produit

Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finis. On a :

$$\dim\left(E_1 \times \dots \times E_p\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim\left(E_k\right).$$

Lorsque les espaces vectoriels sont des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel, il y a une opération qui sera plus adaptée.

Définition 1.4 : Somme de sous-espace vectoriel

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de E. On définit la **somme** de sous-espace vectoriel comme l'ensemble :

$$\{u_1 + \dots + u_p \in E /\ \forall i\, [\![1, p]\!],\ u_i \in F_i\}$$

Cet ensemble est noté :

$$F_1 + \dots + F_p \qquad \text{ou} \qquad \sum_{k=1}^{p} F_k$$

Comme on peut s'y attendre, une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Proposition 1.5 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de E. On a :

$$F_1 + \cdots + F_p = \operatorname{Vect}\left(F_1 \cup \cdots \cup F_p\right).$$

En particulier, $F_1 + \cdots + F_p$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E.

Dans le cas de sous-espaces vectoriels de dimension finie, on dispose d'information sur la dimension de la somme de ces sous-espaces.

Proposition 1.6 : Dimension de la somme de sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de E de dimension finis.
La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de dimension fini.
De plus, on a l'inégalité :

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim\left(F_k\right).$$

Certaine somme de sous-espace vectoriel seront particulièrement utile notamment pour étudier les endomorphismes. Ce sont les sommes directes.

Définition 1.7 : Somme directe

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est **directe** si pour tout $u \in F_1 + \cdots + F_p$, il existe un <u>unique</u> p-uplet $u_1, \dots, u_p$ tel que $u = u_1 + \cdots + u_p$.
Si la somme est directe, on la note :

$$F_1 \oplus \cdots \oplus F_p \qquad \text{ou} \qquad \bigoplus_{k=1}^{p} F_k.$$

On peut commencer par remarquer que dans la définition précédente, il n'est pas nécessaire de vérifier la propriété pour tout vecteur u.

Proposition 1.8 : Caractérisation d'une somme directe

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre :

1. La somme $F = F_1 + \cdots + F_p$ est directe ;
2. si $(u_1, \dots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $u_1 + \cdots + u_n = 0_E$, alors $(u_1, \dots, u_n) = (0_E, \dots, 0_E)$.

Attention !

Dans le cas où il n'y a que deux sous-espaces vectoriels F et G de E. On sait que :

$$\text{la somme } F + G \text{ est directe si, et seulement si, } F \cap G = \{0_E\}.$$

Cette caractérisation ne possède <u>pas</u> de généralisation simple lorsque l'on a plus de sous-espace vectoriel.
Par exemple si $F = \operatorname{Vect}((1,0))$, $G = \operatorname{Vect}((0,1))$ et $H = \operatorname{Vect}((1,1))$, on a :

$$F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{(0,0)\}.$$

Cependant la somme n'est pas directe puisque $\underbrace{(1,0)}_{\in F} + \underbrace{(0,1)}_{\in G} - \underbrace{(1,1)}_{\in H} = (0,0)$

Dans le cas où les sous-espaces sont de dimensions finies on a une caractérisaiton pour qu'une somme soit directe en terme de base des sous-espaces.

Proposition 1.9 : Base adaptée à une décomposition en somme directe

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de E de dimension finis. On note $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ des bases respectives de $F_1, \dots, F_p$. Il y a alors équivalence entre :

1. La somme $F = F_1 + \dots + F_p$ est directe ;
2. La concaténation $\mathscr{B}$ des familles $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ est une famille libre.

De plus, si la somme est directe, alors $\mathscr{B}$ est une base de $F_1 + \dots + F_p$. On dit qu'une telle base est une base **adaptée** à la décomposition en somme directe $F = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

Remarque

On peut se servir de cette proposition pour construire une décomposition en somme directe de sous-espace. En effet, si E est un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p)$ est une base de E, alors en posant $F_i = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_i)$, on a alors la décomposition en somme directe

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p.$$

Cette dernière caractérisation sera souvent utilisée sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 1.10 : Dimension d'une somme directe

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des $\mathbb{K}$-sous-espaces vectoriels de E de dimension finis. Il y a alors équivalence entre :

1. La somme $F = F_1 + \dots + F_p$ est directe ;
2. $\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim\,(F_k)$.

2 Sous-espace stables et matrices par blocs

2.1 Matrices définies par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $i_1 + \dots + i_k = p$ et $j_1 + \dots + j_l = q$. On peut diviser la matrice A de la manière suivante :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overleftrightarrow{\;j_1\;} & & \overleftrightarrow{\;j_l\;} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1l}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{A_{k1}} & \cdots & \boxed{A_{kl}} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow i_1 \\ \\ \updownarrow i_k \end{array} \end{array}$$

On dit que cette matrice est **définie par blocs**.

Si deux matrices A et B de même tailles sont définie avec des blocs de tailles identiques et si de plus λ et μ sont des scalaires, la **combinaison linéaire** $\lambda A + \mu B$ peut alors ce calculer par blocs :

$$\lambda A + \mu B = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overleftrightarrow{\quad j_1 \quad} & & \overleftrightarrow{\quad j_l \quad} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{\lambda A_{11} + \mu B_{11}} & \cdots & \boxed{\lambda A_{1l} + \mu B_{1l}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{\lambda A_{k1} + \mu B_{k1}} & \cdots & \boxed{\lambda A_{kl} + \mu B_{k1}} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow i_1 \\ \\ \updownarrow i_k \end{array} \end{array}$$

Si les tailles des bloques de A et B sont compatibles, le **produit matriciel** AB peut alors se calculer par blocs :

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}B_{11} + \dots + A_{1l}B_{l1}} & \cdots & \boxed{A_{11}B_{1l} + \dots + A_{1l}B_{ll}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{A_{k1}B_{11} + \dots + A_{kl}B_{l1}} & \cdots & \boxed{A_{k1}B_{1l} + \dots + A_{kl}B_{ll}} \end{pmatrix}$$

On peut calculer la **transposée** d'une matrice par blocs A :

$$A^T = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overleftrightarrow{\;i_1\;} & & \overleftrightarrow{\;i_k\;} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}^T} & \cdots & \boxed{A_{k1}^T} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{A_{1l}^T} & \cdots & \boxed{A_{kl}^T} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow j_1 \\ \\ \updownarrow j_l \end{array} \end{array}$$

On dira qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **diagonale par blocs** s'il existe $i_1 + \cdots + i_k = n$ tel que :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overset{i_1}{\longleftrightarrow} & \overset{i_2}{\longleftrightarrow} & & \overset{i_k}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow i_1 \\ \updownarrow i_2 \\ \\ \updownarrow i_k \end{array}$$

où les blocs non représentés sont tous nuls.

On dira enfin, qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **triangulaire par blocs** s'il existe $i_1 + \cdots + i_k = n$ tel que :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overset{i_1}{\longleftrightarrow} & \overset{i_2}{\longleftrightarrow} & & \overset{i_k}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & A_{1k} \\ & A_{22} & & A_{2k} \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow i_1 \\ \updownarrow i_2 \\ \\ \updownarrow i_k \end{array}$$

où les blocs en dessous de la « diagonale par morceaux » sont tous nuls.

Proposition 2.1 : Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs. On a l'égalité :

$$\det(M) = \det(A)\det(C).$$

Attention !

En générale, il n'y a pas de formule simple pour calculer le déterminant d'une matrice par bloc. Par exemple, en général si $A,\ B,\ C,\ D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det(AD - BC)$$

En effet, on peut considèrer les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $AD = BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$

La proposition précédente permet d'obtenir le corollaire direct suivant :

Corollaire 2.2 :

Soit $M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & A_{1k} \\ & A_{22} & & A_{2k} \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs. On a l'égalité :

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_{ii}).$$

2.2 Sous-espace stable

Définition 2.3 : Sous-espace stable

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\varphi : E \to E$ un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est **stable** par φ si pour tout $u \in F$, $\varphi(u)$ appartient à F.

Un exemple de sous-espace stable est donné par la proposition suivante :

Proposition 2.4 :

Soient $\varphi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ deux endomorphismes qui commutent. Le noyau de φ et l'image de φ sont stables par ψ.

Remarque

En particulier, l'image et le noyau d'un endomorphisme est stable par cet endomorphisme.

Exercice

Soit $\varphi : E \to E$ un endomorphisme et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(a) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est triangulaire supérieure ;

(b) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ est stable par φ.

Proposition 2.5 : Traduction matricielle de sous-espace stable

Soient $\varphi : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k, e_k{+}1, \dots, e_n)$ une base de E tel que $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de F. Il y a équivalence entre :

1. F est stable par φ ;
2. la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K})$.

Exemples

Soit $\varphi : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

1. Si par exemple on considère $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k, e_k + 1, \dots, e_n)$ une base de E tel que $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$, on a alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Si par exemple on considère $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k, e_k + 1, \dots, e_n)$ une base de E tel que $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, on a alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

De manière plus générale, lorsque l'on a une décomposition d'un sous-espace vectoriel en somme directe, le fait que les sous-espaces soit stable se traduit matriciellement.

Corollaire 2.6 :

Soient $\varphi : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$ où $\dim(F_i)$ est notée d_i et $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_k)$ une base adaptée à la décomposition de E. Il y a équivalence entre :

1. pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, F_i est un sous-espace stable par φ ;
2. la matrice de φ dans $\mathscr{B}$ est diagonale par bloc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & & d_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & & & \\ & \boxed{A_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_{kk}} \end{pmatrix} \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ \\ d_k \end{array} \end{array}$$

3 Trace

La trace une valeur que l'on peut facilement calculer à partir d'une matrice et qui nous donne (et nous donnera) quelques informations sur cette matrice.

Définition 3.1 : Trace

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit et on note la **trace** A par :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

La trace possède deux propriétés essentielles qui nous seront bien utile.

Proposition 3.2 : Linéarité de la trace

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application :

$$\mathrm{tr}(.) : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

est une application linéaire.

Proposition 3.3 : Trace d'un produit

Soient $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

Attention !

Il y a plusieurs erreurs classiques :

1. En général, $\mathrm{tr}(AB) \neq \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$. Par exemple, on peut prendre $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. En général, $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(ACB)$. Par exemple, on peu prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Corollaire 3.4 : Invariance de la trace par similitude

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP).$$

Autrement dit, deux matrices $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables ont même trace.

Exemple

Ainsi calculer la trace de deux matrices peut permettre de montrer qu'elles ne sont pas semblable. Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'ont pas même trace, donc elles ne sont pas semblables.

Attention !

Le corollaire précédent n'est pas une équivalence. Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a même trace que la matrice nulle mais elles ne sont pas semblable.

Le corollaire précédent permet de définir la trace d'un endomorphisme sans ambiguïté.

Définition 3.5 : Trace d'un endomorphisme

Soient $\varphi : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension fini et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note :

$$\mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi))$$

Remarque

La définition telle qu'elle est écrite semble dépendre du choix de la base $\mathscr{B}$ cependant la corollaire 3 avec la formule de changement de base assure la valeur obtenue est indépendante du choix. En effet, soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)\, P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$$

Or $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$ sont inverses l'une de l'autre ce qui assure que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$ sont semblable et donc qu'elles ont même trace.

Exercice

1. Montrer que si $p : E \to E$ est un projecteur, alors $\mathrm{tr}\,(p) = \mathrm{rg}\,(p)$.
2. Soit $s : E \to E$ est une symétrie. Exprimer la trace de s en fonction de ses sous-espaces caractéristiques.

4 Polynôme d'endomorphisme et de matrice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\varphi : E \to E$ un endomorphisme de E et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. On pose :

$$P(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k$$

où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k\text{fois}}$ et $\varphi^0 = \mathrm{Id}_E$.

Le produit de polynôme se traduit en terme de polynôme d'endomorphismes.

Proposition 4.1 : Produit de polynômes d'endomorphisme

Soient P, Q des polynômes, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme de E. On a l'égalité :

$$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = Q(u) \circ P(u).$$

En particulier, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

Certain polynômes nous serons particulièrement utile pour étudier un endomorphisme.

Définition 4.2 : Polynôme annulateur

Soient E une $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \to E$. On dit qu'un polynôme P est un **polynôme annulateur de** u si $P(u)$ est l'endomorphisme nul.

Méthodes

Les polynômes annulateurs peuvent être par exemple dans les deux méthodes suivantes :

1. Pour montrer qu'un endomorphisme $u : E \to E$ est inversible et déterminer son inverse, on peut montrer qu'il admet un polynôme annulateur $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_0 \neq 0$, on alors :
$$\frac{-1}{a_0}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k u^{k-1}\right) u = Id_E.$$
2. Pour calculer la puissance n-ième de d'un endomorphisme $u : E \to E$, on peut déterminer un polynôme annulateur P de u puis déterminer le reste R_n de la division euclidienne de X^n par P, on a alors :
$$u^n = R_n(u).$$

Proposition 4.3 :

Soient P un polynôme et $u : E \to E$ un endomorphisme. Le noyau de $P(u)$ est stable par u.

De la même manière, on peut parler de polynôme de matrice. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. On pose :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

où $A^0 = I_n$.

L'intégralité des résultats que nous venons de voir peuvent s'appliquer aux polynômes de matrices.

Exercice

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tout les coefficients valent $\frac{1}{n}$ sauf les termes diagonaux qui sont nuls.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A (on pourra commencer par chercher un polynôme annulateur de $nA + I_n$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Calculer A^N pour $N \in \mathbb{N}$.

5 Interpolation Lagrange

Dans toute cette section on fixe un $n \in \mathbb{N}^*$ et $\overline{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On note $\varphi_{\overline{\alpha}}$ l'application linéaire :

$$\varphi_{\overline{\alpha}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) \end{array}$$

5.1 Existence et unicité des polynômes interpolateurs de Lagrange

On peut déterminer à quelle condition sur $\overline{\alpha}$, $\varphi_{\overline{\alpha}}$ est un isomorphisme.

Proposition 5.1 :

L'application $\varphi_{\overline{\alpha}}$ est un isomorphisme si, et seulement si, les α_i sont deux à deux distincts.

Lorsque cette application linéaire est un isomorphisme, on peut alors en déduire une base $\mathbb{R}_n[X]$ à partir de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Corollaire 5.2 : Interpolation de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que les α_i sont deux à deux distincts. Pour tout $(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme L tel que :

$$\deg(L) \leqslant n, \quad L(\alpha_i) = \beta_i$$

Pour calculer les coefficients d'un polynôme interpolateur de Lagrange, nous aurons besoin d'une base de polynômes interpolateurs.

Théorème 5.3 : Base de polynôme interpolateur

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que les α_i sont deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose alors :

$$L_i = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$$

La famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifie les propriétés suivantes :

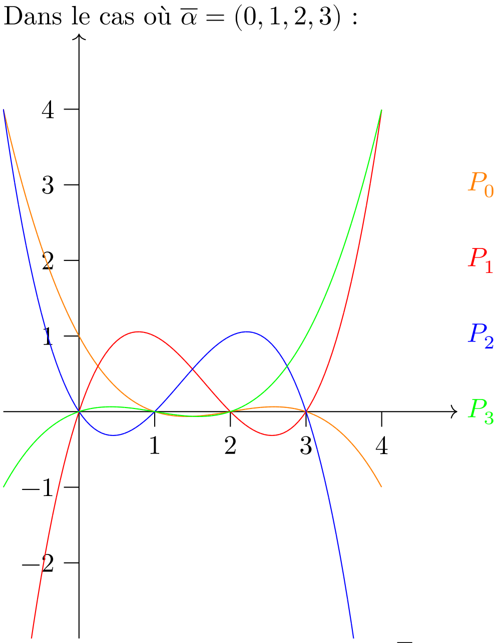
1. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\deg(L_i) \leqslant n$, $\quad L_i(\alpha_i) = 1$ et $\forall j \neq i,\ L_i(\alpha_j) = 0$;
2. la famille est une base $\mathbb{R}_n[X]$;
3. pour tout $(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, le polynôme interpolateur L correspondant est : $L(X) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$.
4. pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} P(\alpha_i) L_i$. En particulier, $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.

On appelle la famille de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ la **base de polynômes interpolateurs de Lagrange** associé à la famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$.

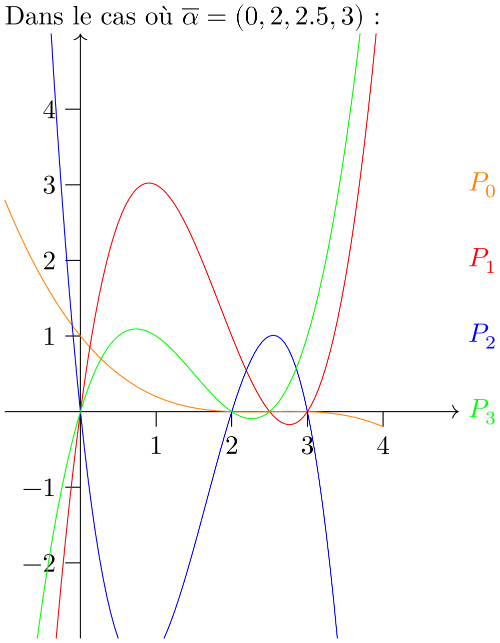
Exemple

Voici la représentation des polynômes interpolateur de Lagrange dans quelques cas :

Dans le cas où $\overline{\alpha} = (0, 1, 2, 3)$:

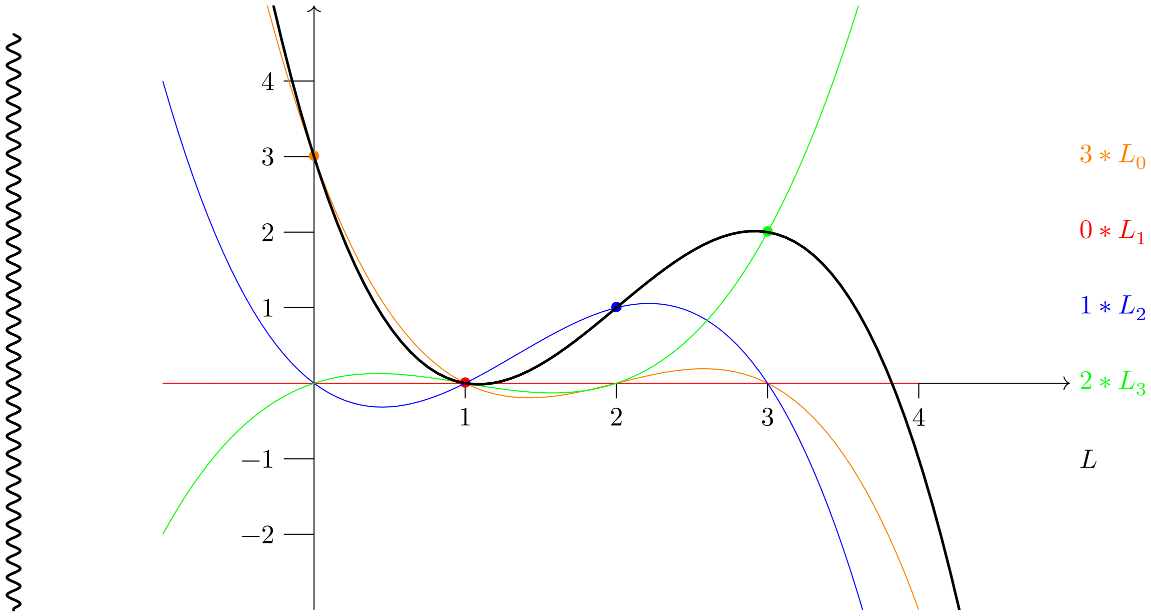


Dans le cas où $\overline{\alpha} = (0, 2, 2.5, 3)$:



Dans le cas où $\overline{\alpha} = (0, 1, 2, 3)$ et $\overline{\beta} = (3, 0, 1, 2)$, le polynôme interpolateur de cette famille de point est :

$$\begin{aligned} L(X) &= 3 \times \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{(-1)\times(-2)\times(-3)} + 0 \times \frac{(X-0)(X-2)(X-3)}{1 \times (-1) \times (-2)} \\ &\quad +1 \times \frac{(X-0)(X-1)(X-3)}{2 \times 1 \times (-1)} + 2 \times \frac{(X-0)(X-1)(X-2)}{3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{-2}{3}X^3 + 4X^2 - \frac{19}{3}X + 3 \end{aligned}$$



5.2 Polynôme interpolateur de Lagrange et déterminant de Vandermonde

Nous allons faire le lien entre l'interpolation et une matrice particulière.

Définition 5.4 : Matrice de Vandermonde

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\overline{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On appelle **matrice de Vandermonde** associée à $\overline{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ la matrice :

$$V_{\overline{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

On note $v_{\overline{\alpha}}$ le déterminant de cette matrice.

Remarque

On munit $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ de leur bases canoniques respectives $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$. La matrice de $\varphi_{\overline{\alpha}}$ avec pour base de départ $\mathscr{B}$ et pour base d'arrivée $\mathscr{B}'$ est exactement $V_{\overline{\alpha}}$. On sait donc déjà que $V_{\overline{\alpha}}$ est inversible si, et seulement si, les α_i sont distincts deux à deux.

Proposition 5.5 : Déterminant de Vandermonde

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\overline{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On a :

$$v_{\overline{\alpha}} = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=0}^{j-1} (\alpha_j - \alpha_i) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

En particulier, $V_{\overline{\alpha}}$ est inversible si, et seulement si, les α_i sont deux à deux distincts.

On peut exprimer la base de polynômes interpolateur de Lagrange en fonction de déterminant de Vandermonde.

Proposition 5.6 : Polynôme interpolateur de Lagrange par le déterminant de Vandermonde

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\overline{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts. On note $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée à $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et tout $x \in \mathbb{K}$, on a :

$$P_i(x) = \frac{v_{(\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)}}{v_{\overline{\alpha}}}.$$