

Chapitre 3 : Intégrales généralisées

Thibaud Lemanissier

2024-2025

PC Lycée Carnot

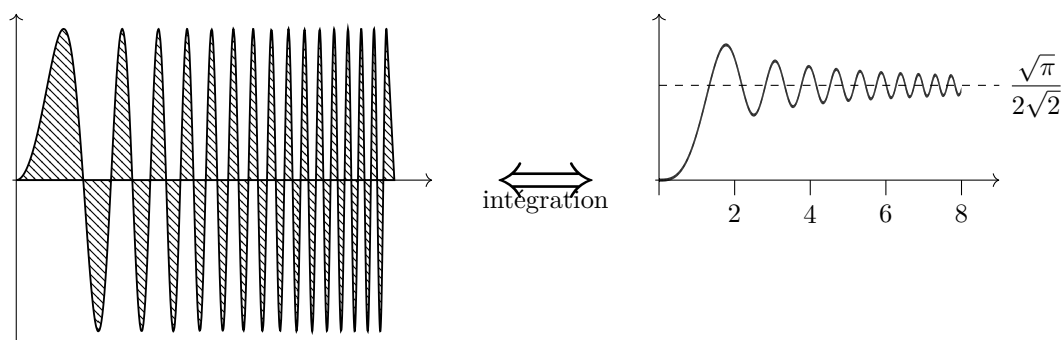


FIGURE 1 – Intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

Table des matières

1	Intégration des fonctions continue par morceaux sur un segment	2
1.1	Fonction continue par morceaux	2
1.2	Intégration des fonctions continues par morceaux	3
2	Borne impropre infini	4
2.1	Définition	4
2.2	Le cas des fonctions positives	5
2.3	Comparaison série intégrale	7
3	Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle	8
3.1	Intégrale convergente sur un intervalle semi-ouvert et ouvert	8
3.2	Intégrales de références	9
3.3	Opération sur les intégrales	10
4	Fonction intégrables sur un intervalle	11
4.1	Définition et premières propriétés	11
4.2	Propriété de l'ensemble des fonctions intégrables	13
4.3	Comparaison d'intégrale	14
5	Méthode d'étude d'une intégrale	16

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Intégration des fonctions continue par morceaux sur un segment

Le but de cette section est d'étendre la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle au cas des fonctions qui ne sont plus nécessairement définie sur un intervalle fermé borné.

1.1 Fonction continue par morceaux

En physique, les fonctions ne sont pas nécessairement continue, nous devrons donc étudier des fonctions plus générale

Définition 1.1 : Fonction continue par morceaux

Soient $k \in \mathbb{N}$ et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **continue (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) par morceaux** si, pour tout segment $[a, b] \subset I$, il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ ($i \in \llbracket 1, p \rrbracket$) est prolongeable sur chaque segment $[a_{i-1}, a_i]$ en une fonction continue (resp. de classe $\mathcal{C}^1$).

On dit que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$ est une **subdivision adaptée** à f .



Remarque

Remarquons que pour une fonction continue par morceaux ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il n'y a pas unicité de la subdivision adaptée.



Attention !

Il ne faut pas simplement que la fonction soit continue une fois restreinte aux intervalles ouverts de la subdivision mais bien qu'elle soit prolongeable par continuité à chaque segment fermé de la subdivision. Par exemple, les fonctions :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$$

ne sont pas continue par morceaux.

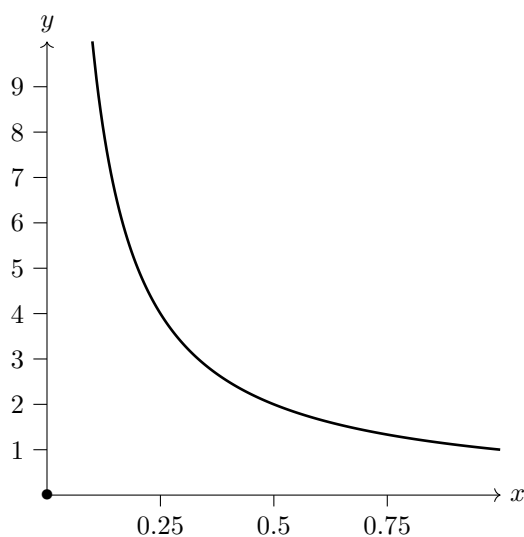
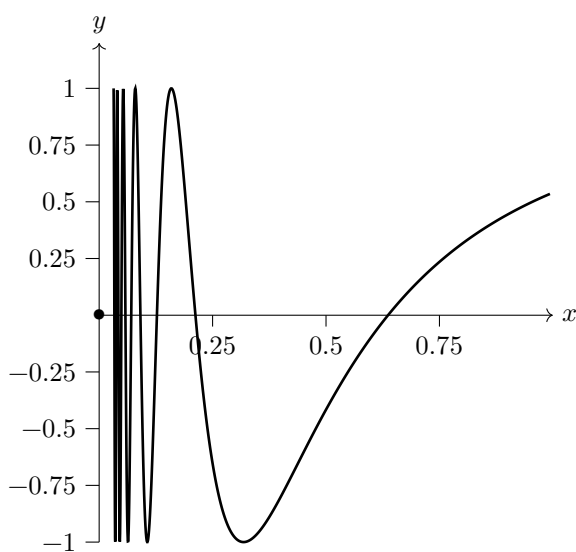


FIGURE 2 – Les graphes des fonctions f (à gauche) et g (à droite)



Exemple

1. On considère la fonction impaire et 2-périodique telle que $f(t) = 1$ pour tout $t \in]0, 1[$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceau mais n'est pas continue. Son graphe est représenté sur la figure ci-contre.
2. On considère la fonction paire et 1-périodique telle que $f(t) = t$ pour tout $t \in [0, 1/2]$. Cette fonction est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceau mais n'est pas $\mathcal{C}^1$. Son graphe est représenté ci-contre.

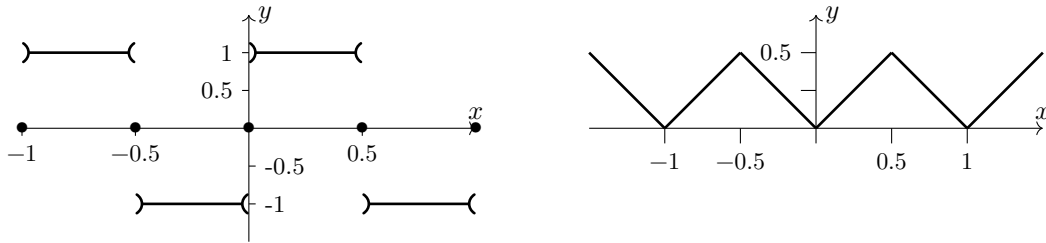


FIGURE 3 – Les graphes des fonctions f (à gauche) et g (à droite)

1.2 Intégration des fonctions continues par morceaux

La raison pour laquelle nous nous intéressons aux fonctions continues par morceaux est qu'il est facile d'étendre l'intégration des fonctions continues à ces fonctions.

Définition 1.2 : Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Soit $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$ une subdivision adaptée à f . On définit l'**intégrale** de f sur $[a, b]$ comme étant égal à :

$$\int_a^b f(t) \, dt := \sum_{i=1}^p \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t) \, dt$$



Exercice

Calculer $\int_0^{2\pi} |\sin(t)| \, dt$.



Remarque

Il est important de remarquer que grâce à la relation de Chasles pour les intégrales de fonction continue, la définition de l'intégrale ne dépend pas du choix de subdivision.

On peut étendre la majeure partie des propriétés des intégrales de fonctions continues sur un intervalle au cas des fonctions continues par morceaux.

Proposition 1.3 : relation de Chasles

Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $c \in [a, b]$. On a :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^c f(t) \, dt + \int_c^b f(t) \, dt$$

Proposition 1.4 : Changement de variable

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

L'égalité suivante est vraie :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du$$

Les propriétés de linéarité, positivité et croissance de l'intégrale sont elles aussi encore vraie pour les fonctions continues par morceaux.

Proposition 1.5 :

Soient f et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$;
2. si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
3. si $f \geq g$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$.

Cependant :



Attention !

Dans le cas des fonctions continues par morceaux, on ne peut plus utiliser l'argument

$$\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt \Rightarrow \forall t \in [a, b], f(t) = 0$$

En effet, la fonction

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas nulle sur $[0, 1]$ mais vérifie $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

2 Borne impropre infini

Le premier cas qui va nous intéresser est le cas d'une fonction continue définie sur intervalle qui n'est pas borné à droite ce type d'intégrale peut être utile en physique, par exemple pour déterminer le potentiel à partir du champ électrique.

2.1 Définition

Définition 2.1 : Intégrale impropre à droite

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux sur tout segment inclus dans $[a, +\infty[$. Nous dirons que l'**intégrale** $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ **est convergente** si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$.

Si l'intégrale est convergente, on note :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

Nous dirons qu'elle **diverge** si elle ne converge pas.

Lorsque l'on étudiera l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, +\infty[$, nous dirons que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est **impropre en** $+\infty$.

Exemple

On considère la fonction $f : t \in [0, +\infty[\mapsto \frac{1}{1+t^2} \in \mathbb{R}$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

En effet, soit $x \in [0, +\infty[$. On a :

$$\int_0^x f(t) dt = \arctan(x)$$

Donc $\int_0^x f(t) dt$ converge vers $\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers $+\infty$.

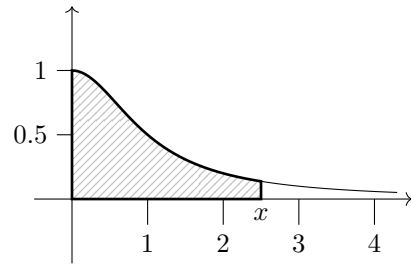


FIGURE 4 – Intégrale de $\frac{1}{1+x^2}$

Exercice

On considère la fonction $h : t \in [0, +\infty[\mapsto \frac{t}{1+t^2} \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ est divergente.

2.2 Le cas des fonctions positives

Proposition 2.2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux et positive sur tout segment inclus dans $[a, +\infty[$. Il y a équivalence entre :

1. l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente ;
2. la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est bornée sur $[a, +\infty[$.

Exemple

Cette proposition repose sur le fait qu'une primitive d'une fonction à valeur positive est croissante. On peut donc se représenter le cas convergent dans le cas d'une fonction à valeur positive comme ci-contre. Ici illustré dans le cas où la fonction f est définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par $\frac{t}{(1+t^2)^2}$ et donc où $\int_0^x f(t) dt = \frac{x^2}{2(1+x^2)}$.

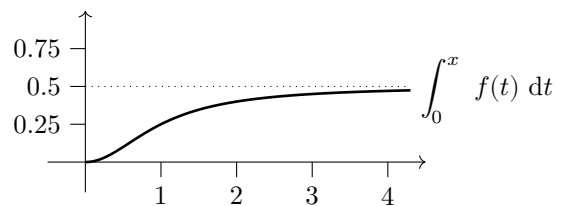


FIGURE 5 – Primitive de $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ qui s'annule en 0

Proposition 2.3 : Critère de comparaison

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions continues par morceaux sur tout segment inclus dans $[a, +\infty[$ telles que :

$$\forall t \in [a, +\infty[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

On a les deux cas suivant :

- Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ l'est aussi ;
- Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est divergente, alors $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ l'est aussi.

**Remarque**

Il n'est en réalité pas nécessaire que la majoration soit vérifiée sur tout l'intervalle $[a, +\infty[$, il suffit qu'elle le soit à partir d'un $b \in [a, +\infty[$.

**Attention !**

Il y a plusieurs erreurs classiques à éviter :

1. majorer (resp. minorer) par une fonction dont l'intégrale divergente (resp. convergente) ne permet pas de conclure.
2. Il est essentiel de vérifier la positivité.

**Exemple**

Cette proposition permet de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2} dt$ est convergente. On remarque que la fonction $t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$0 \leq \frac{\sin^2(t)}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Or nous avons vu que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est convergente. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2} dt$ l'est aussi.

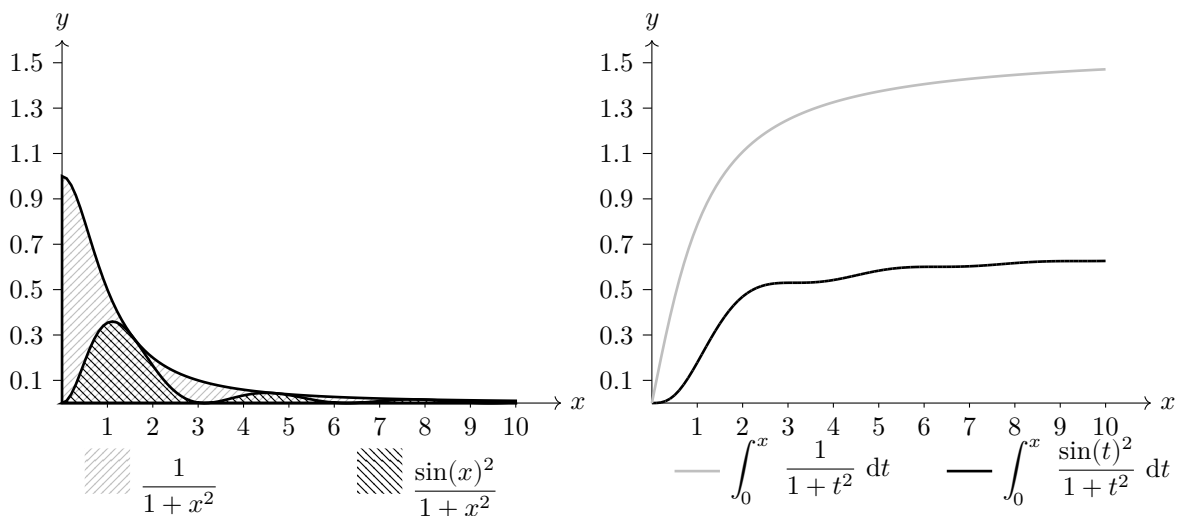


FIGURE 6 – Représentation des fonctions ainsi que de leur primitive qui s'annulent en 0



Exercice

Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{2 + \cos(t)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt$ est divergente.

2.3 Comparaison série intégrale

Nous avons déjà vu qu'une comparaison série intégrale pouvait permettre de montrer la convergence de certaine série ou dans certain cas donner un équivalent des sommes partiels. Nous allons voir qu'elle permet aussi d'étudier le reste d'une série convergente.

Théorème 2.4 : Critère de convergence par comparaison séries-intégrales

Soit $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur tout segment inclus dans $[n_0, +\infty[$, positive et décroissante.

L'intégral $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ est convergente.

Pour tout $m \geq n_0$, on a :

$$f(m) + \int_m^{+\infty} f(t) dt \geq R_m \geq \int_m^{+\infty} f(t) dt$$

où $R_m = \sum_{n=m}^{+\infty} f(n)$ est le m -ième reste.



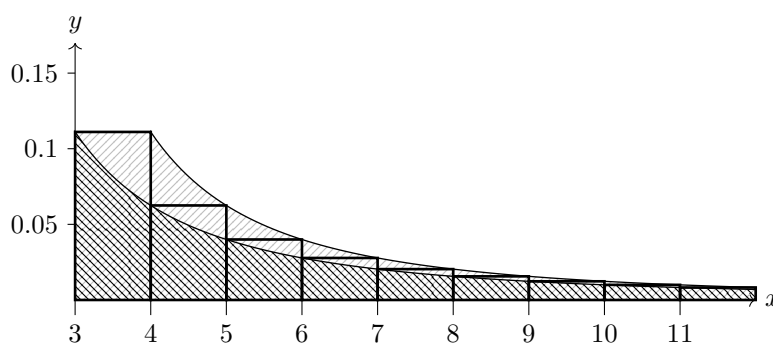
Exemple

On considère la fonction $f : t \in [1, +\infty[\mapsto 1/t^2 \in \mathbb{R}$. La série (et l'intégrale) est convergente. La comparaison série intégrale permet donc d'avoir l'encadrement suivant pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{m} = \int_m^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{m^2} + \int_m^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m}$$

Donc :

$$R_m \equiv m \rightarrow +\infty \frac{1}{m}.$$



Une application classique de la comparaison série intégral est illustré par l'exercice suivant :



Exercice

Montrer que la série la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^2}$ est convergente et déterminer un entier $n \geq 2$ tel que la somme

partielle $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)^2}$ est une approximation de la somme de la série à 10^{-4} près.

3 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

Dans cette partie, nous allons généraliser ce que nous avons vu précédemment au cas d'un intervalle semi ouvert et ouvert.

3.1 Intégrale convergente sur un intervalle semi-ouvert et ouvert

Commençons par remarquer que la définition d'intégrale convergente se généralise immédiatement au cas des fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$ avec $b \in [a, +\infty[$.

Exemple

On considère la fonction $f : t \in [0, 2[\mapsto \frac{1}{\sqrt{2-t}} \in \mathbb{R}$.

L'intégrale $\int_0^2 f(t) dt$ est convergente.

En effet, soit $x \in [0, 2[$. On a :

$$\int_0^x f(t) dt = -2\sqrt{2-x} + 2\sqrt{2}$$

Donc $\int_0^x f(t) dt$ converge vers $2\sqrt{2}$ quand x tend vers 2.

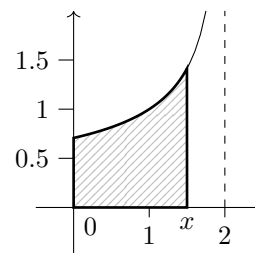


FIGURE 7 – Intégrale de $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$

Nous pouvons aussi maintenant généraliser la notion d'intégrale impropre en la borne de gauche.

Définition 3.1 : Intégrale impropre à gauche

Soient $b \in \mathbb{R}$, $a \in [-\infty, b[$ et f une fonction continue par morceaux sur tout segment inclus $]a, b]$. Nous dirons que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **convergente** si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ admet une limite quand x tend vers a^+ .

Si l'intégrale est convergente, on note :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$$

Lorsque l'on étudiera l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $]a, b]$, nous dirons que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **impropre en a** .

Exemple

On considère la fonction $f : t \in]-\infty, 0] \mapsto \exp(t) \in \mathbb{R}$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^0 \exp(t) dt$ est convergente. En effet, soit $x \in]-\infty, 0]$. On a :

$$\int_x^0 \exp(t) dt = 1 - \exp(x)$$

Donc $\int_x^0 f(t) dt$ converge vers 1 quand x tend vers $-\infty$.

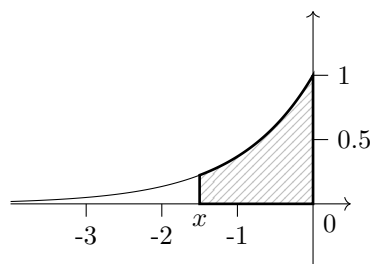


FIGURE 8 – Intégrale de $\exp(x)$

Définition 3.2 :

Soient $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f une fonction continue par morceaux sur inclus dans $]a, b[$. Nous dirons que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **convergente** s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont convergentes.

Si l'intégrale est convergente, on note :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

**Exercice**

Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt$ est convergente.

3.2 Intégrales de références

Il existe 3 intégrales qui vont nous permettre d'étudier d'autres en les comparant avec celle-ci.

Proposition 3.3 : Intégrale de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$;
2. L'intégrale $\int_0^1 t^{-\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Un cas particulièrement important des intégrales de Riemann est le cas limite c'est à dire quand $\alpha = 1$. Dans ce cas les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ sont divergentes.

Proposition 3.4 : Intégrale exponentielles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Il reste une intégrale de référence qui peut être utile.

Proposition 3.5 : Intégrale logarithme

L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente.

3.3 Opération sur les intégrales

Les opérations sur l'intégrale de Riemann s'étendent naturellement aux intégrales généralisées.

Théorème 3.6 : Relation de Chasles

Soient $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur tout segment inclus dans $]a, b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, alors pour tout $c \in]a, b[$, les intégrales

$$\int_a^c f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t) dt$$

sont convergentes et on a l'égalité :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Le changement sera utile pour montrer qu'une intégrale impropre est convergente voir pour la calculer.

Théorème 3.7 : Changement de variable

Soient $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur tout segment inclus dans $]a, b[$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante telle que $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \varphi(x) = a$ et $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x) = b$.

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si, et seulement si, l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ l'est.

De plus, si elle converge, alors on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$$



Remarque

Le théorème se généralise immédiatement au cas où la fonction φ est strictement décroissante.



Exercice

On considère l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Montrer que cette intégrale est convergente en utilisant le changement de variable $t = \sin(x)$ et calculer sa valeur.

Profitons-en pour faire un autre exemple classique qui n'est pas une intégrale impropre.



Exercice

On considère l'intégrale :

$$\int_0^\pi \frac{1}{2 + \cos(t)} dt$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2 + \cos(t)} = \frac{1}{1 + 2 \cos^2(\frac{t}{2})}$.

2. Utiliser le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ pour montrer que :

$$\int_0^\pi \frac{1}{2 + \cos(t)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2}{3 + u^2} du$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale proposée.

Théorème 3.8 : Intégration par partie

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f et g admettent des limites en a et en b .

L'intégrale $\int_a^b f'(t)g(t) dt$ converge si, et seulement si, $\int_a^b f(t)g'(t) dt$ converge.

En cas de convergence, on a de plus l'égalité :

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

où $[f(t)g(t)]_a^b = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t)g(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} f(t)g(t)$.



Exercice

Montrer que l'intégrale $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

4 Fonction intégrables sur un intervalle

Dans cette section I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, a la borne inférieure de I et b la borne supérieure de I .

4.1 Définition et premières propriétés

Définition 4.1 : Intégrale absolument convergente

Nous dirons qu'une fonction f continue par morceaux sur tout segment inclus dans I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est **intégrable** si l'intégrale

$$\int_a^b |f(t)| dt$$

est convergente. Nous dirons aussi que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **absolument convergente**.



Remarque

Si une fonction f continue par morceaux sur tout segment inclus dans I est à valeurs réelles et si elle est de signe constant, alors il est équivalent de dire que f est intégrable ou que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente. Sans ces hypothèses, ce n'est plus le cas.



Exemple

La fonction $f : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{\sin(t)}{t^2} \in \mathbb{R}$ est intégrable. En effet, pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $|f(t)| = \frac{|\sin(t)|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$. Or nous avons vu que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente. D'après le critère de comparaison l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^2} dt$ est convergente.

Proposition 4.2 : Absolument convergent implique convergent

Soit f continue par morceaux sur tout segment inclus dans I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est intégrable, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

Cette proposition permet d'avoir le corollaire suivant :

Corollaire 4.3 : Le cas prolongeable par continuité en une borne finie

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Si f est prolongeable par continuité, alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

**Exercice**

Montrer que les intégrales $\int_{-\pi}^0 \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_0^\pi t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ sont convergentes.

**Attention !**

La réciproque de cette proposition est fausse. Par exemple, nous avons vu que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente (la fonction est prolongeable par continuité en 0), cependant elle n'est pas absolument convergente.

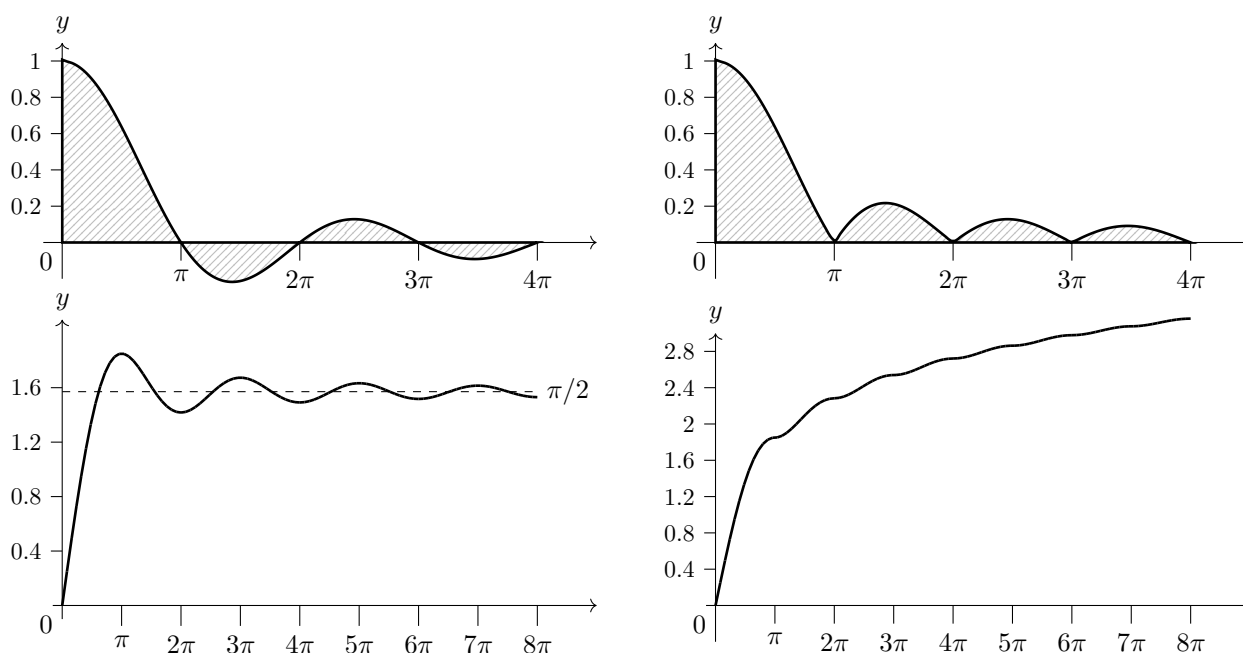


FIGURE 9 – Intégrale de $\frac{\sin(x)}{x}$ et $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$ ainsi que leur intégrale

**Exercice**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{n} \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \frac{2}{n+1}$.
2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.

4.2 Propriété de l'ensemble des fonctions intégrables

Nous allons étendre les propriétés de l'intégrale usuelle aux intégrales absolument convergentes.

Proposition 4.4 : Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions intégrables sur I et λ et μ deux scalaires. La fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable de plus, on a :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

Cette proposition a une conséquence très importante :

Corollaire 4.5 :

Soit I un intervalle. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur tout segment inclus dans I à valeur dans $\mathbb{K}$ et intégrables est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

Proposition 4.6 : Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue par morceaux sur tout segment inclus dans I à valeurs réelles telle que $f \geq 0$ i.e. pour tout $t \in I$, $f(t) \geq 0$. On a alors :

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0$$

De plus, $\int_a^b f(t) dt = 0$ si, et seulement si, $f = 0$ i.e. pour tout $t \in I$, $f(t) = 0$.

Corollaire 4.7 : Croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur tout segment inclus dans I à valeurs réelles. Si $f \geq g$ i.e. pour tout $t \in I$, $f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Proposition 4.8 : Inégalité triangulaire

Soit f continue par morceaux sur tout segment inclus dans I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est intégrable, alors on a :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Enfin, si $\int_a^b |f(t)| dt = 0$, alors f est identiquement nulle sur I .

4.3 Comparaison d'intégrale

Le critère de comparaison peut s'étendre au fonction intégrable.

Proposition 4.9 : Critère de majoration

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a + \infty]$ et f et g deux fonctions continues par morceaux sur tout segment inclus dans $[a, b[$. Supposons que $|f| \leq |g|$ au voisinage de b i.e. il existe $\beta \in [a, b[$ tel que pour tout $t \in [\beta, b[$, $|f(t)| \leq |g(t)|$.

Si l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ est absolument convergente, alors $\int_a^b f(t) dt$ l'est aussi.



Méthode

Soit f une fonction positive sur $[a, b[$. Pour montrer que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ impropre en b est convergente à l'aide du critère de majoration, il faut :

1. Vérifier que f est bien continue sur $[a, b[$.
2. Trouver une fonction simple g majorant $|f|$ (au moins à partir d'une valeur suffisamment grande) et telle que $\int_a^b g(t) dt$ soit convergente. En générale, on utilisera les fonctions des intégrales de référence.



Exercice

1. On considère la fonction $f : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{2t(1+t^2)} \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.
2. On considère la fonction $g : t \in [0, +\infty[\mapsto \frac{t^{3/2}}{1+t^2} \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ est divergente.

La proposition suivante généralise le critère de majoration :

Proposition 4.10 : Critère du grand O

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a + \infty]$ et f et g deux fonctions continues par morceaux sur tout segment inclus dans $[a, b[$ à valeurs réelles. Supposons que $f = O_b(g)$.

Si l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ est absolument convergente, alors $\int_a^b f(t) dt$ l'est aussi.

Cette proposition à pour conséquence le cas particulier important suivant :

Corollaire 4.11 : Critère du grand o

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a + \infty]$ et f et g deux fonctions continues par morceaux sur tout segment inclus dans $[a, b[$ à valeurs réelles. Supposons que $f = o_b(g)$.

Si l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ est absolument convergente, alors $\int_a^b f(t) dt$ l'est aussi.



Exercice

Montrer que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt$ est convergente.



Méthode

Soit f une fonction positive sur $[a, b[$. Pour montrer que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ impropre en b est convergente à l'aide du critère de majoration, il faut :

1. Vérifier que f est bien continue sur $[a, b[$.
2. Trouver une fonction simple g telle que $f = o_b(g)$ (au moins à partir d'une valeur suffisamment grande) et telle que $\int_a^b g(t) dt$ soit convergente. En générale, on utilisera les fonctions des intégrales de référence.

Proposition 4.12 : Critère d'équivalence

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a + \infty]$ et f et g deux fonctions continues par morceaux sur tout segment inclus dans $[a, b[$ à valeurs réelles. Supposons que $f \equiv bg$.

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente si, et seulement si, l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ est absolument convergente.



Exemple

On considère la fonction $f : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{t^2 + \sin(t)} \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

En effet, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $f(t) \geq 0$ et on a $f(t) \equiv +\infty \frac{1}{t^2}$. Or nous avons vu que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente.



Exercice

Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{t}{t^2 + \sin^2(t)} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^2 + \sin^2(t)} dt$ sont divergentes.



Remarque

On peut adapter les règles de comparaison au cas des intégrales d'une fonction définie sur $]a, b]$.

5 Méthode d'étude d'une intégrale



Méthode

Comment étudier la convergence d'une intégrale $\int_a^b f(t) dt$?

Tout d'abord, l'essentiel du travail se fait sur l'intégrande et non sur l'intégrale. Le symbole $\int$ ne doit donc pas intervenir dans la majeure partie du raisonnement sauf dans le cas d'une intégration par partie ou d'un changement de variable. Ces deux méthodes seront le plus souvent suggérées par l'énoncé.

1. Déterminer le lieu de continuité de la fonction f et découper l'intervalle $]a, b[$ pour n'avoir qu'une seule borne impropre par intervalle. Par exemple, pour $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} dt$, on découpe l'intervalle en $] -\infty, -2]$, $[-2, -1[$, $] -1, 0]$ et $[0, +\infty[$.
2. On se place dans le cas $]c, d]$. Si c est réel et la fonction f est prolongeable par continuité en c , alors l'intégrale $\int_c^d f(t) dt$ est convergente. Par exemple

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt,$$

Sinon on continue.

3. Si la fonction n'est pas positive, on remplace $f(t)$ par $|f(t)|$. Par exemple :

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt, \quad \int_0^{+\infty} \sin(t) \sin(e^{-t}) dt$$

4. On simplifie l'expression à l'aide d'un équivalent (les équivalents à connaître sont les mêmes que ceux de la liste des développements limités à connaître) pour ce ramener à une intégrale de référence en utilisant éventuellement un changement de variable simple du type $y = \alpha x + \beta$. Puis on utilise soigneusement le critère l'équivalence. Par exemple :

$$\begin{array}{lll} \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt, & \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt, & \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt \\ \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\tan(t)} dt, & \int_{-1}^0 \frac{t}{t^3+1} dt, & \int_0^1 \frac{1}{e^t-1} dt \\ \int_0^{1/2} \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}} dt, & \int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}} dt, & \int_0^{+\infty} \sin(t) \sin(e^{-t}) dt \end{array}$$

Si ce n'est pas possible, alors on continue.

5. On majore l'intégrande par l'intégrande d'une intégrale de référence convergente en utilisant éventuellement un changement de variable simple du type $y = ax + b$. Puis on utilise soigneusement le critère de majoration. Par exemple :

$$\begin{array}{ll} \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt & \text{on a } \forall t \in [1, +\infty[, e^{-t^2} \leq e^{-t} \\ \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) dt & \text{on a } \forall t \in]0, 1], \left|\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right| \leq 1 \\ \int_0^{+\infty} \sin(t) \sin(e^{-t}) dt & \text{on a } \forall t \in]0, 1], |\sin(t) \sin(e^{-t})| \leq e^{-t} \end{array}$$

Si ce n'est pas possible, alors on continue.

6. On minore l'intégrande par l'intégrande d'une intégrale de référence divergente en utilisant éventuellement un changement de variable simple du type $y = ax + b$. Puis on utilise soigneusement le critère de minoration. Par exemple :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t} dt \quad \text{on a } \forall t \in [1, +\infty[, \frac{e^{-1}}{t} \leq \frac{e^{\sin(t)}}{t}$$