Convergence dominée et intégration terme à terme.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n^2}\, e^{-\frac{x}{n}}$.

a. Montrer que chaque fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

c. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction intégrable f.

d. Quelle remarque peut-on faire ?

- -

a. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = 0$, donc $f_n(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi, f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $n \geq 1$.

b. Calcul facile: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ (évident), la suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Une étude de variations montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = f_n(n) = \frac{1}{en} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ ,$$

donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

d. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$, mais $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x = 0$. Ainsi, sur un intervalle quelconque, la convergence uniforme d'une suite de fonctions ne permet pas d'intervertir limite et intégrale, les théorèmes vus dans le cas d'un segment ne sont plus valables. *C'est pourquoi, sur un intervalle quelconque, on invoquera le* **théorème de convergence dominée**, *dont les hypothèses sont différentes.*

---

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue, telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

- -

Notons d'abord que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$: en effet, comme f admet une limite finie en $+\infty$, elle est bornée "au voisinage de $+\infty$", disons sur un intervalle de la forme $[A,+\infty[$ avec $A > 0$. Enfin, elle est bornée sur le segment $[0,A]$ car elle est continue sur ce segment. On peut donc introduire le réel $\|f\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\big|f(x)\big|$.

Posons $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $t = nu$ donne $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(nu)\,\mathrm{d}u$. Considérons alors la suite de fonctions (g_n) définies sur $[0,1]$ par $\forall u \in [0,1] \quad g_n(u) = f(nu)$. Ces fonctions g_n sont continues sur $[0,1]$ et la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction constante de valeur l. On a, de plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall u \in [0,1] \qquad \big|g_n(u)\big| \leq \|f\|_\infty\ ,$$

ce qui est une condition de domination valide puisque la fonction constante $u \mapsto \|f\|_\infty$ est intégrable sur le segment $[0,1]$. Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1\Big(\lim_{u\to+\infty} g_n(u)\Big)\,\mathrm{d}u = l$.

---

3. Montrer que $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \quad \dfrac{2t}{\pi} \leq \sin t$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \left(1 - \sin\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$.

- -

• La fonction sinus est concave sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puisque sa dérivée seconde $-\sin$ est négative sur cet intervalle. Sa courbe représentative est alors située au-dessus de sa sécante sur ce segment, ce qui donne l'inégalité demandée.

• Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \sin\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{n\pi}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x > \dfrac{n\pi}{2} \end{cases}$. On cherche alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$, avec $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \left(1 - \sin\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+} f_n$, il y a de la cvd dans l'air!

Chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, étudions la convergence simple de la suite (f_n) : pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 1$ pour tout n et, si on fixe $x > 0$, on a, pour n assez grand (précisément dès que $\dfrac{n\pi}{2} > x$), $f_n(x) = e^{g_n(x)}$, avec

$$g_n(x) = n \ln\left(1 - \sin\frac{x}{n}\right) = n \ln\left(1 - \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -x \ ,$$

donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$. Enfin, si $0 \leq x < \dfrac{n\pi}{2}$, alors $\sin\dfrac{x}{n} \geq \dfrac{2x}{n\pi}$ d'après l'inégalité prouvée au début de l'exo puis, en utilisant l'inégalité usuelle $\ln(1+u) \leq u$ pour $u \in]-1, +\infty[$,

$$g_n(x) = \ln\big(f_n(x)\big) = n \ln\left(1 - \sin\frac{x}{n}\right) \leq -n \sin\frac{x}{n} \leq -\frac{2x}{\pi} \ ,$$

on a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leq f_n(x) \leq e^{-\frac{2x}{\pi}}$ (*cette majoration est évidemment valable aussi pour* $x > \dfrac{n\pi}{2}$ *puisqu'alors* $f_n(x) = 0$), la fonction $\varphi : x \mapsto e^{-\frac{2x}{\pi}}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de convergence dominée s'applique donc et donne

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n = \int_{\mathbb{R}_+} f = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 \ .$$

---

4. Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Donner un équivalent de $\displaystyle I_n = \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n$.

- -

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $0 \leq \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \leq \dfrac{x}{n}$, d'où $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{n(1+x^2)}$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (parce qu'elle est prolongeable par continuité en 0 et qu'elle est équivalente à $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$). Donc, par comparaison, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $f_n(x) \sim \dfrac{1}{n(1+x^2)}$ lorsque n tend vers $+\infty$ (x étant fixé), on peut conjecturer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{n(1+x^2)} = \frac{\pi}{2n}$. Il reste à le démontrer! Comme aucun théorème ne mentionne d'interversion d'intégrales et d'équivalents, essayons de nous ramener à une interversion limite-intégrale: l'objectif est alors de prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{\pi}{2}$.

On a $nI_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)$, avec $g_n(x) = n\, f_n(x) = n\,\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$. Les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, on a la domination $0 \leq g_n(x) \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction g étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème de convergence dominée s'applique donc à la suite de fonctions (g_n), et permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} g_n = \int_{\mathbb{R}_+^*} g = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, ce que l'on cherchait à démontrer. On a donc bien $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.

---

5. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée, avec $f(0) \neq 0$. Donner un équivalent de

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}\, f(t)}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$$

lorsque n tend vers $+\infty$.
On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- -

Soit $M = \|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}_+} |f|$. On a $\left|\dfrac{e^{-nt}\, f(t)}{\sqrt{t}}\right| \sim \dfrac{|f(0)|}{\sqrt{t}}$ au voisinage de zéro, d'où l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{e^{-nt}\, f(t)}{\sqrt{t}}$ sur $]0,1]$, et $\left|\dfrac{e^{-nt}\, f(t)}{\sqrt{t}}\right| \leq Me^{-nt}$ sur $[1,+\infty[$, d'où l'intégrabilité sur cet intervalle. Tout cela garantit l'existence de a_n (convergence de l'intégrale généralisée).

Posons $nt = u^2$; on a alors $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}} J_n$, avec $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, f\left(\frac{u^2}{n}\right) \mathrm{d}u$. Si l'on pose $g_n(u) = e^{-u^2}\, f\left(\dfrac{u^2}{n}\right)$ pour $u \in \mathbb{R}_+$, les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction continue $g : u \mapsto e^{-u^2}\, f(0)$, et on a la domination $|g_n(u)| \leq M\, e^{-u^2}$, cette fonction majorante de la seule variable u étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de convergence dominée s'applique donc, ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_n = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\lim_{n\to+\infty} g_n\right) = \int_{\mathbb{R}_+} g = f(0) \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = f(0)\, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Finalement, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} f(0)\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

6. Par intégration terme à terme, calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

- -

• Commençons par nous assurer de l'existence (ou la convergence) des intégrales I et J : la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$, prolongeable par continuité au point 1 en posant $f(1) = 1$, et on a $f(x) \sim -\ln x = |\ln x|$ en zéro, cela assure son intégrabilité sur $]0,1[$ puisque l'on sait que la fonction ln est intégrable sur cet intervalle. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x+1}$ est continue et négative sur $]0,1]$ avec $g(x) \sim \ln x$ en zéro, ce qui assure aussi son intégrabilité sur cet intervalle.

• Pour $x \in]0,1[$, on a

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1} = \frac{-\ln x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^n\ \ln x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\ :$$

les fonctions $f_n : x \mapsto -x^n\ \ln x$ sont continues et intégrables sur $]0,1[$ (c'est du cours pour f_0, et pour $n \geq 1$, elles sont prolongeables par continuité en 0 et en 1 avec $f_n(0) = f_n(1) = 0$), la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ et a pour somme f. Par ailleurs, en intégrant par parties,

$$\int_0^1 |f_n| = \int_0^1 f_n = \int_0^1 -x^n\ \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et la série de terme général $\dfrac{1}{(n+1)^2}$ est convergente : on peut donc intervertir série et intégrale, ce qui donne

$$I = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

• De même, pour $x \in]0,1[$, on a

$$g(x) = \frac{\ln x}{x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\ \ln x = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$$

avec $g_n(x) = (-1)^n x^n\ \ln x = (-1)^{n+1} f_n(x)$, et $\displaystyle\int_0^1 |g_n| = \int_0^1 f_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, ce qui autorise aussi l'intégration terme à terme :

$$J = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 g_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}\ .$$

En effet, en posant $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (*c'est connu!*) et $T=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, on a

$$S+T=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{(2p)^2}=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}=\frac{1}{2}\,S\ ,$$

donc $T=-\frac{S}{2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

---

7. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\ \frac{n!}{(2n)!}$.

- -

La fonction $s:x\mapsto e^{-x}\ \cos(\sqrt{x})$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (puisque $|s(x)|\leq e^{-x}$). On développe le cosinus en série entière : $s(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$, avec $u_n(x)=\frac{(-1)^n\ x^n\ e^{-x}}{(2n)!}$. Il s'agit donc d'intervertir série et intégrale.
Pour tout n entier naturel, la fonction $x\mapsto x^n e^{-x}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$), et $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x=n!$ (se fait par récurrence en intégrant par parties). Les fonctions u_n sont donc toutes continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et a pour somme s qui est continue ; enfin, $\int_{\mathbb{R}_+}|u_n|=\frac{n!}{(2n)!}$, terme général d'une série convergente (le lecteur le vérifiera en utilisant la règle de d'Alembert). On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et cela donne immédiatement le résultat demandé.

---

8. Pour $x>0$, on pose

$$s(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t\ .$$

Donner un développement de s en série de fonctions rationnelles. Donner un équivalent de $s(x)$ lorsque x tend vers 0. *Pour cette dernière question, on envisagera un encadrement de la série par des intégrales.*

- -

• Soit $x>0$, la fonction $f_x:t\mapsto\frac{\sin t}{e^{xt}-1}$ vérifie $\lim_{t\to 0}f_x(t)=\frac{1}{x}$ (f_x est prolongeable par continuité en zéro) et $f_x(t)=O(e^{-xt})$ lorsque t tend vers $+\infty$, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où l'existence de $s(x)$.

• Pour $x>0$, $t>0$, écrivons

$$f_x(t)=\frac{\sin t}{e^{xt}-1}=\frac{e^{-xt}}{1-e^{-xt}}\ \sin t=\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nxt}\Big)\ \sin t$$

en utilisant le développement $\dfrac{1}{1-u}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u^n$, valable pour $u\in]-1,1[$. De $|\sin t|\leq|t|$ (inégalité classique), on déduit

$$\int_0^{+\infty}\left|e^{-nxt}\ \sin t\right|\mathrm{d}t\leq\int_0^{+\infty}t\,e^{-nxt}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{n^2x^2}\ .$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2x^2}$ converge, on peut donc intégrer terme à terme :

$$s(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-nxt}\ \sin t\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}\ .$$

En effet, on a

$$\int_0^{+\infty}e^{-nxt}\ \sin t\,\mathrm{d}t=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}e^{(i-nx)t}\ \mathrm{d}t\right)=\mathrm{Im}\Big(\frac{1}{nx-i}\Big)=\frac{1}{1+n^2x^2}\ .$$

• Pour $x>0$ fixé, la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}\leq\frac{1}{1+n^2x^2}\leq\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}\ ,$$

puis, en sommant,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}\leq s(x)\leq\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}\ ,$$

soit $\dfrac{\pi}{2x}-\dfrac{\arctan x}{x}\leq s(x)\leq\dfrac{\pi}{2x}$. Le minorant et le majorant étant équivalents entre eux lorsque x tend vers zéro, on déduit que $s(x)\sim\dfrac{\pi}{2x}$ lorsque x tend vers 0.

---

9. Soit $I_n=\displaystyle\int_0^1\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi^2}{12n}$. (*oral Mines-Ponts*)

- -

Posons d'abord le changement de variable $u=t^n$, soit $t=u^{\frac{1}{n}}$, dans l'intégrale, on obtient $nI_n=\displaystyle\int_0^1u^{\frac{1}{n}-1}\ \ln(1+u)\,\mathrm{d}u$. On applique maintenant le théorème de convergence dominée : posons $f_n(u)=u^{\frac{1}{n}-1}\ \ln(1+u)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $u\in]0,1]$, ce sont des fonctions continues sur $]0,1]$. Pour tout $u\in]0,1]$ fixé, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f_n(u)=f(u)$ en posant $f(u)=\dfrac{\ln(1+u)}{u}$ (fonction continue aussi sur $]0,1]$), et on a la domination $0\leq f_n(u)\leq f(u)$, la fonction f

étant intégrable sur $]0,1]$ puisqu'elle est prolongeable par continuité en 0. On peut donc intervertir limite et intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty} n\,I_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(u)\Big)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u\ .$$

Il nous reste donc à calculer cette intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$. Pour cela, on développe en série entière : pour $u \in]0,1[$, on a $f(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{n}$ (la relation est vraie aussi au point 1, et aussi au point 0 si on prolonge par continuité avec $f(0)=1$). Donc $J = \displaystyle\int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(u)\Big)\,\mathrm{d}u$, en posant $g_n(u) = (-1)^{n-1}\dfrac{u^{n-1}}{n}$: les fonctions g_n sont continues et intégrables (évident) sur $]0,1[$, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $]0,1[$ et a pour somme la fonction continue f, et enfin $\displaystyle\int_{]0,1[}|g_n| = \frac{1}{n^2}$ (terme général d'une série convergente). On peut donc intervertir série et intégrale, ce qui donne $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 g_n(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$: *en effet, il est classique que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, *on sépare les termes d'indices impairs et ceux d'indices pairs, soit* $\dfrac{\pi^2}{6} = S_I + S_P$ *avec* $S_I = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$ *et* $S_P = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{24}$, *on en déduit* $S_I = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{\pi^2}{24} = \dfrac{\pi^2}{8}$, *enfin* $J = S_I - S_P = \dfrac{\pi^2}{12}$. Finalement, on a bien $I_n \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$.

10.a. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $g : t \mapsto e^{-t}\,f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

b. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler, c'est-à-dire

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\ .$$

- -

a. On sait que, pour tout réel t, on a $e^{-t} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$. Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction $g_n :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ par

$$g_n(t) \;=\; \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n f(t) & \text{si} \quad 0<t<n \\ \quad 0 & \text{si} \qquad t \geq n\ . \end{cases}$$

Alors g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et la suite (g_n) converge simplement, sur $\mathbb{R}_+^*$, vers la fonction $g : t \mapsto e^{-t}$. L'inégalité classique $\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leq -\dfrac{t}{n}$, valable pour $t \in [0,n[$, montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad |g_n(t)| \leq |g(t)|\ ,$$

avec g (donc aussi $|g|$) supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'hypothèse de domination est alors vérifiée et le théorème de convergence dominée s'applique.

b. La fonction $t \mapsto e^{-t} \ \ln t$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est équivalente à $\ln t$ au voisinage de 0, et elle est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$), donc, d'après **a.**, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \ \ln t \ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ \ln t \ \mathrm{d}t$. Par ailleurs, le changement de variable $u = 1-\dfrac{t}{n}$, puis une intégration par parties que l'on justifiera, donnent

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ \ln t \ \mathrm{d}t &= n\int_0^1 u^n \ \ln\big[n(1-u)\big] \ \mathrm{d}u \\
&= \frac{n}{n+1}\ \ln n + \frac{n}{n+1}\Big[(u^{n+1}-1)\cdot\ln(1-u)\Big]_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{n}{n+1}\ \left[\ln n - \int_0^1 (1+u+\cdots+u^n)\ \mathrm{d}u\right]\ .
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ \ln t \ \mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\ \left[\ln n - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right]\ .$$

Le résultat s'en déduit immédiatement.

---

11. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}\ \ln x}{x^2-1}$.

a. Montrer que f_n est intégrable sur $]0,1[$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

- -

a. La fonction f_n est continue sur $]0,1[$, avec $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$ puisque $\lim\limits_{x\to 0} x^{2n+1}\ \ln(x) = 0$, et $\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = \dfrac{1}{2}$ qui se déduit de $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$. Elle est donc prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$, elle est donc intégrable sur $]0,1[$.

b. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,1[$, et on a la domination

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall x\in\,]0,1[\qquad \big|f_n(x)\big| \leq \big|f_1(x)\big|\ ,$$

la fonction f_1 étant intégrable sur $]0,1[$ d'après **a.** Par le théorème de convergence dominée, on obtient alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c. Notons que $I_{k-1} - I_k = -\displaystyle\int_0^1 x^{2k-1}\ \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4k^2}$ par une intégration par parties dont les détails sont laissés au lecteur.

Fixons n entier naturel. Alors, pour tout $p > n$, on a, par télescopage,

$$I_n = (I_n - I_{n+1}) + (I_{n+1} - I_{n+2}) + \cdots + (I_{p-1} - I_p) + I_p = \sum_{k=n+1}^{p} (I_{k-1} - I_k) + I_p\ ,$$

soit $I_n = I_p + \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{4k^2}$. Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p = 0$, il reste $I_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2}$.

12.a. Pour p et q entiers naturels, convergence et calcul de $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p\ (\ln x)^q\ \mathrm{d}x$.

b. Prouver les égalités $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ et $\displaystyle\int_0^1 x^x\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

- -

a. La fonction $f_{p,q} : x \mapsto x^p\ (\ln x)^q$ est continue sur $]0,1[$.

Elle est prolongeable par continuité au point 1, avec la valeur 0 si $q > 0$, ou 1 si $q = 0$.

Si $p > 0$, elle est aussi prolongeable par continuité en 0 avec la valeur 0, d'où son intégrabilité sur $]0,1[$. Sinon, de $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}(\ln x)^q = 0$, on déduit l'intégrabilité de $f_{0,q}$ en 0 puisque $f_{0,q}(x) = (\ln x)^q = o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ lorsque $x \to 0$.

Pour le calcul, notons d'abord que $I_{p,0} = \dfrac{1}{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Puis, pour $q \geq 1$, intégrons par parties:

$$I_{p,q} = -\int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}\,\frac{q}{x}\,(\ln x)^{q-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{q}{p+1}\,I_{p,q-1}\ ,$$

et une récurence facile donne $I_{p,q} = \dfrac{(-1)^q\,q!}{(p+1)^q}\,I_{p,0} = \dfrac{(-1)^q\,q!}{(p+1)^{q+1}}$.

b. • Posons $g(x) = \dfrac{1}{x^x}$ pour $x \in\,]0,1[$, alors $g(x) = e^{-x\ \ln(x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ en posant

$g_n(x) = \dfrac{(-1)^n\, x^n\,(\ln x)^n}{n!}$, soit $g_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}\, f_{n,n}$. Les fonctions g_n sont donc intégrables sur $]0,1[$ d'après **a.**, on a $\displaystyle\int_0^1 |g_n| = \int_0^1 g_n = \frac{|I_{n,n}|}{n!} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ qui est clairement sommable, on peut donc intégrer terme à terme, et cela donne

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}\ .$$

- Un calcul semblable (et, surtout, des justifications semblables) donne

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n g_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}\ .$$

---

13. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$. On admettra que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

a. Déterminer $l = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

b. Donner un équivalent de $I_n - l$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}$.

d. En déduire un équivalent de $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$, puis un développement asymptotique à trois termes de I_n.

- -

a. On a facilement

$$0 \le 1 - I_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^n}\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\ ,$$

donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = l = 1$.

b. Intégrons par parties:

$$\begin{aligned} I_n - l = I_n - 1 &= -\frac{1}{n} \int_0^1 t\, \frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n}\left(\Big[t\,\ln(1+t^n)\Big]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{1}{n}\Big(\ln(2) - J_n\Big)\ , \end{aligned}$$

avec $0 \le J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ et

$$I_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(2)}{n}\ .$$

On a donc déjà le développement asymptotique $I_n = 1 - \dfrac{\ln(2)}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

c. Pour $t \in [0,1[$, on a $\ln(1+t^n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)$, avec $f_k(t) = \dfrac{(-1)^{k-1}\, t^{nk}}{k}$. Le théorème d'intégration terme à terme s'applique puisque $\displaystyle\int_{[0,1[} |f_k| = \frac{1}{k(nk+1)}$ est le terme général d'une série convergente, et on obtient le résultat voulu.

d. Comme, pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{k-1}}{nk^2}$, on peut conjecturer que ceci "passe à la somme", autrement dit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{nk^2} = \frac{\pi^2}{12n}$. Prouvons-le rigoureusement en majorant la différence (en valeur absolue, bien sûr!):

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{nk^2}\right| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k}}{nk^2(nk+1)}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2k^3} = \frac{\zeta(3)}{n^2}$$

en posant $\zeta(3) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$, et ceci est bien négligeable devant $\dfrac{\pi^2}{12n}$ lorsque $n \to +\infty$. On conclut que $J_n \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$, puis que

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\, J_n \; = \; 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\ .$$

---

14. Pour $a > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$.

- -

Pour $t \in [0,1[$, on peut écrire $\dfrac{1}{1+t^a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-t^a)^n$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{na}\Big)\mathrm{d}t$, et l'on a bien envie d'intervertir série et intégrale, d'autant plus que cela nous donnerait le résultat demandé! Mais, si on pose $f_n(t) = (-1)^n\, t^{na}$, on a $\displaystyle\int_0^1 \big|f_n(t)\big|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+na}$ et la série diverge, on ne peut donc pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

Posons alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ka+1}$, il suffit alors de prouver que cette somme partielle tend vers l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$ lorsque n tend vers l'infini. On observe que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{ka}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} (-t^a)^k\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} + (-1)^n\, J_n\ ,$$

en posant $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$. Enfin, $0 \leq J_n \leq \displaystyle\int_0^1 t^{(n+1)a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)a+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$, ce qu'il fallait démontrer.

Intégrales dépendant d'un paramètre.

15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\,(1+t)}$.

a. Montrer que f est définie et monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$, et aussi lorsque $x \to 0^+$.

- -

a. Soit l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times [1,+\infty[\;\to\; \mathbb{R} \\ \qquad (x,t) \;\mapsto\; \dfrac{1}{t^x(1+t)} \end{cases}$. Alors, pour $x > 0$ fixé, on a $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$; comme $x+1>1$, on a prouvé la convergence de l'intégrale impropre, c'est-à-dire l'existence de $f(x)$.

Montrons la décroissance de f sans calculer sa dérivée : si x et y vérifient $0 < x < y$, alors, pour tout $t \in]1,+\infty[$, on a $\varphi(x,t) > \varphi(y,t)$; en intégrant cette inégalité, on obtient $f(x) > f(y)$: l'inégalité est stricte car on intègre des fonctions continues et non identiques (la fonction différence est positive non identiquement nulle, donc son intégrale est strictement positive). La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. • On a, pour tout $x > 0$,

$$f(x) + f(x+1) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}} = \left[-\frac{1}{x\,t^x}\right]_{t=1}^{t\to+\infty} = \frac{1}{x}\;.$$

• Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $x > 1$,

$$f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x-1) + f(x)\;, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2(x-1)}\;,$$

d'où l'équivalence $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

• D'autre part, $f(x) = \dfrac{1}{x} - f(x+1)$; lorsque x tend vers zéro, $f(x+1)$ est borné ($0 < f(x+1) < f(1)$ pour $x \in]0,1[$) et est donc négligeable devant $\dfrac{1}{x}$ qui tend vers l'infini. Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Annexe. La fonction φ admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\ln t}{t^x(1+t)}$. En considérant $a > 0$, la majoration $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{\ln t}{t^{a+1}}$ est valable pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[1,+\infty[$ et, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^{a+1}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\dfrac{\ln t}{t^{a+1}} = o\left(\dfrac{1}{t^{1+\frac{a}{2}}}\right)$ en $+\infty$ par croissance comparée des fonctions puissances et logarithmes ; on a ainsi prouvé que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln t \, \mathrm{d}t}{t^x(1+t)} \; .$$

Donc $f'(x) < 0$ et on retrouve bien ainsi la stricte décroissante de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (question **a.**).

---

16. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \, \mathrm{d}t$.

a. Ensemble de définition de f ?

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

c. Expliciter f.

- -

a. Posons $g(x, t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel x fixé, l'application partielle $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifie $\lim\limits_{t \to 0} g(x, t) = x$ (donc elle est prolongeable par continuité en 0), et on a $g(x, t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \mathrm{sgn}(x)\, \dfrac{\pi}{2t^3}$. On en déduit que cette application partielle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, quel que soit le réel x. Donc $D_f = \mathbb{R}$.

b. On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$, l'application $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ et on a la domination $0 \leq \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ par une fonction intégrable de la variable t seulement, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, par dérivation sous le signe intégrale,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\,(1+x^2t^2)} \; .$$

c. Calculons donc : comme f' est manifestement paire, supposons $x > 0$, et aussi $x \neq 1$ pour avoir deux pôles simples. En posant $T = t^2$, on décompose en élements simples :

$$\frac{1}{(1+T)(1+x^2T)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{x^2}{1+x^2T} - \frac{1}{1+T} \right) .$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on a alors

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2(x^2-1)}(x-1) = \frac{\pi}{2(x+1)} \; .$$

Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors f' est continue et la relation reste vraie pour $x = 0$ et pour $x = 1$. Comme enfin, f' est paire, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{\pi}{2\,(1+|x|)} \; .$$

Comme $f(0) = 0$, on déduit (*en discutant suivant le signe de x*)

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\, \ln(1+x) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\, \ln(1-x) & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \; .$$

---

17. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Montrer que $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)\big)^x\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(\varphi(x)\big)^{\frac{1}{x}}$.

- -

Posons $h(x,t) = \big(f(t)\big)^x = e^{x\,\ln f(t)}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$; alors h est continue (car produit, composée) sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ (donc l'application partielle $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur le segment $[0,1]$, ce qui garantit déjà l'existence de $\varphi(x)$), et admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \ln\big(f(t)\big)\cdot\big(f(t)\big)^x$.

Si S est un segment de $\mathbb{R}$, alors l'application $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, qui est continue sur le pavé $S\times[0,1]$ (partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$), est bornée sur ce pavé : $\forall (x,t) \in S \times [0,1]$ $\quad\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq M_S$; comme la fonction constante $t \mapsto M_S$ est intégrable sur le segment $[0,1]$, on a une condition de domination qui permet d'affirmer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment S. La fonction φ est alors $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(x) = \int_{[0,1]} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln\big(f(t)\big)\cdot\big(f(t)\big)^x\,\mathrm{d}t\,.$$

En particulier, $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t = 1$ et $\varphi'(0) = \displaystyle\int_0^1 \ln\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_{[0,1]} \ln\circ f$, notons K cette dernière intégrale.

La fonction φ admet donc un développement limité à l'ordre 1 en zéro, à savoir $\varphi(x) = 1 + K\,x + o(x)$, puis

$$\frac{1}{x}\,\ln\big(\varphi(x)\big) = \frac{1}{x}\,\ln\big(1 + K\,x + o(x)\big) = \frac{1}{x}\,\big(K\,x + o(x)\big) = K + o(1)\,,$$

autrement dit $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\,\ln\big(\varphi(x)\big) = K$; en prenant l'exponentielle, on a

$$\lim_{x\to 0} \big(\varphi(x)\big)^{\frac{1}{x}} = e^K = \exp\left(\int_0^1 \ln\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t\right)\,.$$

---

18. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que $f(0) = 0$. On définit $g : I \to \mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ si $t \neq 0$, et $g(0) = f'(0)$.

a. Montrer la relation $\forall t \in I \quad g(t) = \displaystyle\int_0^1 f'(tu)\,\mathrm{d}u$.

b. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I ; calculer $g^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

- -

a. On a $g(0)=f'(0)=\displaystyle\int_0^1 f'(0)\,\mathrm{d}u$ et, pour $t\neq 0$, le changement de variable $v=tu$ donne

$$\int_0^1 f'(tu)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{t}\int_0^t f'(v)\,\mathrm{d}v=\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{f(t)}{t}=g(t)\ ,$$

car f est au moins de classe $\mathcal{C}^1$.

b. L'application $\varphi:(t,u)\mapsto\varphi(t,u)=f'(tu)$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $I\times[0,1]$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^{n-1}$. Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, on a $\dfrac{\partial^k\varphi}{\partial t^k}(t,u)=u^k\,f^{(k+1)}(tu)$. Si S est un segment inclus dans I, alors l'application continue $\dfrac{\partial^k\varphi}{\partial t^k}$ est bornée sur le pavé (partie fermée bornée du plan) $S\times[0,1]$, donc "dominée" par une fonction constante qui est alors intégrable sur le segment $[0,1]$: ces conditions permettent d'appliquer $n-1$ fois le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$, on en tire que la fonction $g:t\mapsto\displaystyle\int_0^1\varphi(t,u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur tout segment de I, donc finalement sur I, avec

$$\forall t\in I\quad\forall k\in[\![0,n-1]\!]\qquad g^{(k)}(t)=\int_0^1 u^k\,f^{(k+1)}(tu)\,\mathrm{d}u\ .$$

En particulier, $g^{(k)}(0)=f^{(k+1)}(0)\cdot\displaystyle\int_0^1 u^k\,\mathrm{d}u=\frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$.

---

19. Pour $x>-1$, on pose $g(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,t^x\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

b. Calculer $g'(x)$. En déduire $g(x)$.

- -

a. • Pour $(x,t)\in]-1,+\infty[\times]0,1[$, posons $f(x,t)=\dfrac{(t-1)\,t^x}{\ln t}$, cela pourra toujours servir. En fixant $x\in]-1,+\infty[$, du fait que $\ln t\underset{t\to1}{\sim}t-1$, on constate que $\displaystyle\lim_{t\to1}f(x,t)=\lim_{t\to1}t^x=1$, l'intégrande est donc prolongeable par continuité au point 1 (l'intégrale est "faussement généralisée" en ce point). Par ailleurs, lorsque $t\to0$, on a

$$f(x,t)\underset{t\to0}{\sim}\frac{t^x}{|\ln t|}=\frac{1}{|\ln t|\,t^{-x}}=o\Big(\frac{1}{t^{-x}}\Big)\ ,$$

et comme $-x<1$, la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^{-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$; par comparaison de fonctions positives, on a l'intégrabilité de $t\mapsto f(x,t)$ sur $]0,1[$, d'où l'existence de $g(x)$.

• On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=(t-1)\,t^x=t^{x+1}-t^x$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[\times]0,1[$, et si on fixe $a>-1$, pour $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,1[$, on a la domination

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big|=(1-t)\,t^x\leq(1-t)\,t^a\leq t^a\ ,$$

la fonction $t \mapsto t^a$ étant intégrable sur $]0,1[$ puisque $a > -1$. Le théorème de dérivation des intégrales paramétrées s'applique alors : la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > -1$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, et

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^{x+1} - t^x\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{(x+1)(x+2)}\ .$$

b. Par intégration, on a $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right) + C$, où C est une constante. Mais, pour $t \in]0,1[$, on a par concavité du logarithme, $\ln t \leq t-1$, soit (ce sont des quantités négatives) : $|\ln t| \geq |t-1| = 1-t$, donc $\left|\dfrac{t-1}{\ln t}\right| \leq 1$. Donc

$$|g(x)| = g(x) = \int_0^1 \left|\frac{t-1}{\ln t}\right| t^x\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

On en déduit que $C = 0$, donc $\forall x \in]-1,+\infty[\quad g(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$.

---

20. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que $F(x)$ est bien défini pour tout $x \geq 0$.

b. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$.

c. Calculer $F^{(n)}(0)$ pour n entier naturel.

- -

a. Pour tout $x \geq 0$, l'application $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, avec la majoration

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+tx} \leq e^{-t}\ ,$$

la fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit l'existence de $F(x)$ pour tout $x \geq 0$.

b. Posons $f(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{1+tx}$ pour $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, et on calcule facilement $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \dfrac{(-1)^k\,k!\,t^k\,e^{-t}}{(1+tx)^{k+1}}$, cette expression dépendant continûment de t. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dispose de la domination

$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2 \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq k!\,t^k\,e^{-t}\ ,$$

la fonction $t \mapsto k!\,t^k\,e^{-t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad F^{(k)}(x) = (-1)^k\,k! \int_0^{+\infty} \frac{t^k\,e^{-t}}{(1+xt)^{k+1}}\,\mathrm{d}t\ .$$

c. En particulier, $F^{(n)}(0) = (-1)^n\,n! \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = (-1)^n\,(n!)^2$.

21. Pour $x > 0$ et $y > 0$, on pose $F(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}\,\mathrm{d}t$. Pour $y > 0$ fixé, montrer que l'application partielle $x \mapsto F(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$. En déduire l'expression de $F(x,y)$.

- -

Fixons $y > 0$. L'application $g_y : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}$, définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, est continue par rapport à t, de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x avec $\dfrac{\partial g_y}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}$, cette dérivée partielle est donc continue par rapport à t et, si $S = [a,b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, alors pour $(x,t) \in S \times \mathbb{R}_+^*$, on a la domination $\left|\dfrac{\partial g_y}{\partial x}(x,t)\right| \le e^{-at}$ (fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$). Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique donc, et l'application $x \mapsto F(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_y(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g_y}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\ .$$

On en déduit que $F(x,y) = -\ln(x) + h(y)$, où $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction de la variable y seulement. *On peut par exemple écrire que*

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad F(x,y) = F(1,y) + \int_1^x \partial_1 F(t,y)\,\mathrm{d}t = F(1,y) - \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(x) + F(1,y)\ .$$

Par ailleurs, pour $y > 0$, on a $F(y,y) = 0 = -\ln(y) + h(y)$ d'où $h(y) = \ln(y)$. Finalement, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad F(x,y) = \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

22.a. Pour x réel positif, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $g'(x)$. En déduire $g(x)$ pour $x > 0$.

b*. Pour $x > 0$, montrer que $g(0) - g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(u)\,\sin\frac{u}{x}\,\mathrm{d}u$ où φ est la fonction définie par $\varphi(u) = \dfrac{1 - e^{-u}}{u}$. À l'aide d'une intégration par parties, prouver l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ .$$

- -

a. Pour $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, posons $f(x,t) = e^{-xt}\,\dfrac{\sin t}{t}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, l'inégalité $|f(x,t)| \le e^{-xt}$ garantit l'intégrabilité de l'application partielle $t \mapsto f(x,t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc l'existence de l'intégrale $g(x)$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\,\sin t$. Si $S = [a,b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ $(0 < a < b)$, alors

$$\forall (x,t) \in S \times \mathbb{R}_+^* \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at}$$

(fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$), on peut donc appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre : la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\sin t\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{1+x^2}\ .$$

On en déduit que $g(x) = -\operatorname{Arctan} x + C$, mais de l'inégalité classique $|\sin t| \leq |t|$, on tire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad |g(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\ ,$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, d'où $C = \dfrac{\pi}{2}$. Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\ .$$

b. On pose $g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$: cette intégrale généralisée est "semi-convergente" (traité en classe), c'est-à-dire qu'elle est convergente, mais pas absolument convergente, autrement dit la fonction sinus cardinal $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui fait que le théorème de continuité des intégrales à paramètre ne peut s'appliquer directement pour prouver la continuité en 0 de la fonction g (on ne peut satisfaire la condition de domination). Il faut donc ruser...

Rusons : pour $x > 0$, le changement de variable $u = tx$ donne

$$g(0) - g(x) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt})\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{u}\,\sin\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \varphi(u)\,\sin\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u\ .$$

Intégrons par parties : en effet, la fonction $\varphi' : u \mapsto \dfrac{(1+u)\,e^{-u} - 1}{u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est prolongeable par continuité en 0 avec $\lim\limits_{u\to 0} \varphi'(u) = -\dfrac{1}{2}$ et qu'elle est $O\Big(\dfrac{1}{u^2}\Big)$ au voisinage de $+\infty$, ce qui justifie la convergence des différents termes obtenus. Ainsi,

$$\begin{aligned} g(0) - g(x) &= -x\left[\varphi(u)\,\cos\frac{u}{x}\right]_{u=0}^{u\to+\infty} + x\int_0^{+\infty} \varphi'(u)\,\cos\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= x + x\int_0^{+\infty} \varphi'(u)\,\cos\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}x\ , \end{aligned}$$

donc $\big|g(0) - g(x)\big| \leq x\Big(1 + \displaystyle\int_0^{+\infty} |\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u\Big)$, d'où $\lim\limits_{x\to 0}\big(g(0) - g(x)\big) = 0$: la fonction g est donc continue en zéro. Finalement, on obtient la valeur de l'**intégrale de Dirichlet** :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\Big) = \frac{\pi}{2}\ .$$

---

23. Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$, continues, telles que $\forall x \in I \quad u(x) < v(x)$. Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

Montrer que l'application $g\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I. *On pourra poser* $t = u(x) + s\,\big(v(x) - u(x)\big)$, *où* s *désigne une nouvelle variable.*

- -

Le changement de variable proposé donne

$$\forall x \in I \qquad g(x) = \big(v(x) - u(x)\big)\ \int_0^1 f\big(x\ ,\ (1-s)u(x) + s\,v(x)\big)\,\mathrm{d}s\ .$$

La fonction $\varphi : (x,s) \mapsto f\big(x\ ,\ (1-s)u(x) + s\,v(x)\big)$ est continue sur $I \times [0,1]$ et, si S est un segment inclus dans I, sa continuité sur la partie fermée bornée $S \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^2$ permet de la majorer en valeur absolue par une constante M_S sur cette partie. Comme la fonction constante $s \mapsto M_S$ est intégrable sur le segment $[0,1]$, ceci nous fournit une domination valide pour appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre: l'application

$$x \mapsto \int_0^1 f\big(x\ ,\ (1-s)u(x) + s\,v(x)\big)\,\mathrm{d}s$$

est donc continue sur I. Comme il en est de même de $v - u$, on déduit, par produit, que g est continue sur I.

Transformées de Laplace et de Fourier. Intégrales eulériennes

24. On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

b. À l'aide d'une intégration par parties itérée, calculer l'intégrale (avec $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$):

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\,\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}t\ .$$

c. Montrer que

$$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\ n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\ .$$

- -

a. Si on pose $f_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$ pour x réel et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a d'abord $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f_x(t) = 0$ pour tout x par croissances comparées, donc la fonction f_x est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour tout réel x. Mais $f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$, elle est donc intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x > 0$. L'ensemble de définition de la fonction Γ est donc $\mathbb{R}_+^*$.

b. Une première intégration par parties donne, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n(x) = \left[\frac{t^x}{x} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right]_{t=0}^{t=n} + \frac{1}{x} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x \,\mathrm{d}t \,,$$

Une deuxième donne $I_n(x) = \dfrac{n-1}{n} \dfrac{1}{x(x+1)} \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{x+1} \,\mathrm{d}t$. Après n étapes, on obtient

$$I_n(x) = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \int_0^n t^{x+n-1} \,\mathrm{d}t = \frac{n!}{n^n} \frac{n^{x+n}}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} \,.$$

soit $I_n(x) = \dfrac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$, tiens donc, on dirait que ça prépare la question suivante!

c. Pour $x > 0$ fixé, soit $u_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si} \quad 0 \le t \le n \\ 0 & \text{si} \quad t > n \end{cases}$.

Chaque fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la suite (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction continue $f_x : t \mapsto t^{x-1}\, e^{-t}$ et, avec l'inégalité usuelle $\ln(1+t) \le t$ pour $t > -1$, on a la domination

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \le u_n(t) \le f_x(t) \,,$$

la fonction f_x étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.** Le théorème de convergence dominée s'applique donc et donne

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t) \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \,.$$

---

25. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on note Tf ou encore $\widehat{f}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Tf(x) = \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt} \,\mathrm{d}t \,.$$

La fonction $\widehat{f} = Tf$ est la **transformée de Fourier** de f. L'application $T : f \mapsto Tf$ est la **transformation de Fourier**.

a. Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est définie sur $\mathbb{R}$, et que c'est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Soit la fonction "créneau" φ définie par $\varphi(t) = 1$ si $t \in [-1, 1]$ et $\varphi(t) = 0$ sinon. Calculer sa transformée de Fourier $x \mapsto \widehat{\varphi}(x)$.

c. Soit a un réel strictement positif, soit la fonction f définie par $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = e^{-a|t|}$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa transformée de Fourier $\widehat{f}$.

d. On suppose dans cette question que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée f' est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, puis prouver la relation $\forall x \in \mathbb{R} \quad \widehat{f'}\,(x) = ix\, \widehat{f}(x)$

- -

a. On a $|f(t)\,e^{-ixt}| = |f(t)|$, et f est supposée intégrable sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout réel x, la fonction $t \mapsto f(t)\,e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et l'intégrale généralisée définissant $\widehat{f}(x)$ est convergente pour tout réel x.

Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, posons $h(x,t) = f(t)\,e^{-ixt}$. La fonction h est continue par rapport à la variable x, continue par morceaux par rapport à la variable t, et on a la domination $|h(x,t)| \leq |f(t)|$ (*qui est en fait une égalité*) avec f intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de continuité sous le signe intégrale s'applique alors et garantit la continuité de la fonction $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f étant intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\widehat{f}(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)\,e^{-ixt}|\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |f| = \|f\|_1\ ,$$

ce qui montre que $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable (car elle est nulle en dehors du segment $[-1,1]$), et $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \widehat{\varphi}(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$. Pour $x = 0$, on obtient $\widehat{\varphi}(0) = 2$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\widehat{\varphi}(x) = \frac{i}{x}\,(e^{-ix} - e^{ix}) = 2\,\frac{\sin x}{x}\ .$$

La transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de la fonction φ est donc $\widehat{\varphi} = 2\,\mathrm{sinc}$, où sinc est la fonction **sinus cardinal**, à savoir $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ prolongée par continuité en zéro.

c. La fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$ car, sur cet intervalle, on a $f(t) = e^{-at}$ et c'est du cours! Comme f est paire, elle est aussi intégrable sur $]-\infty,0]$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. Bon, on calcule

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \qquad \widehat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-ix)t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+ix)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{a-ix}\,e^{(a-ix)t}\right]_{t\to-\infty}^{t=0} - \left[\frac{1}{a+ix}\,e^{-(a+ix)t}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} \\
&= \frac{1}{a-ix} + \frac{1}{a+ix} = \frac{2a}{a^2+x^2}\ .
\end{aligned}$$

Rappel : on a par exemple $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+ix)t} = 0$ *car* $\left|e^{-(a+ix)t}\right| = e^{-at} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

d. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(t) = f(0) + \displaystyle\int_0^t f'(u)\,\mathrm{d}u$ et l'intégrabilité de f' sur $\mathbb{R}$ montre que l'intégrale du second membre a une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$. Ainsi, la fonction f admet une limite finie l en $+\infty$, précisément $l = \displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(u)\,\mathrm{d}u$. Si cette limite l n'était pas nulle, alors au voisinage de $+\infty$, on pourrait écrire $f(t) \sim l$ et, la fonction constante l n'étant évidemment pas intégrable sur $[0,+\infty[$, la fonction f ne serait pas non plus intégrable sur cet intervalle. En conclusion, $l = \lim\limits_{+\infty} f = 0$. On prouve de même que $\lim\limits_{-\infty} f = 0$.

Intégrons par parties :

$$\widehat{f'}\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\,e^{-ixt}\Big]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} + i\,x\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\ .$$

Cette i.p.p. est justifiée par l'étude précédente (le terme entre crochets admet des limites finies, ici nulles, aux bornes de l'intervalle d'intégration), il reste alors la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \widehat{f'}\,(x) = ix\,\widehat{f}(x)\ .$$

Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux, la **transformée de Laplace** *de f est la fonction $\mathcal{L}[f]$ définie par*

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout réel p tel que cette intégrale est convergente.

26. Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes, en précisant le domaine de définition :

$f : t \mapsto t^n \quad (n \in \mathbb{N})$; $\quad g : t \mapsto e^{at} \quad (a \in \mathbb{C})$; $\quad s : t \mapsto \sin\omega t \quad (\omega \in \mathbb{R}_+^*)$;

$$c : t \mapsto \cos\omega t \quad (\omega \in \mathbb{R}_+^*) \quad ; \qquad h : t \mapsto \frac{\sin t}{t}\ .$$

- -

Voir cours de SII !

Bon, je donne les réponses quand même, sans trop détailler les calculs :

• $\mathcal{L}[f](p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ pour $p > 0$ (faire n intégrations par parties).

• $\mathcal{L}[g](p) = \dfrac{1}{p-a}$ pour $p > \mathrm{Re}(a)$.

• Du calcul précédent, on déduit notamment que la transformée de Laplace de $t \mapsto e^{i\omega t}$ est $p \mapsto \dfrac{1}{p - i\omega}$ pour $p > 0$. En prenant les parties réelle et imaginaire, on obtient $\mathcal{L}[c](p) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\mathcal{L}[s](p) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ pour $p > 0$.

• $\mathcal{L}[h](p) = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,p = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{p}$ pour $p > 0$. Pour le prouver, on montre que la fonction $H = \mathcal{L}[h] : p \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $H'(p) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+p^2}$ ce qui détermine H à une constante près, et on montre enfin que $|H(p)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}$, d'où $\lim\limits_{p\to+\infty} H(p) = 0$, ce qui détermine la constante. C'est en fait l'exercice **22.** ci-dessus.

27. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un réel p_0 tel que la fonction $t \mapsto e^{-p_0 t}\, f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f]$ est définie et continue sur l'intervalle $[p_0, +\infty[$.

b. Montrer que la fonction $\mathcal{L}[f]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]p_0, +\infty[$ et que, sur cet intervalle, on a, pour tout n entier naturel, la relation $\big(\mathcal{L}[f]\big)^{(n)} = (-1)^n\, \mathcal{L}[g_n]$, où g_n est la fonction définie par $g_n(t) = t^n\, f(t)$.

- -

a. Soit $h : [p_0, +\infty[\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, $(p,t) \mapsto e^{-pt}\, f(t)$. Alors h est continue et on a la domination

$$\forall (p,t) \in [p_0, +\infty[\times\mathbb{R}_+ \qquad |h(p,t)| \leq e^{-p_0 t}\, |f(t)|\ ,$$

cette fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre permet alors d'affirmer que la fonction $\mathcal{L}[f]$ est définie et continue sur $[p_0, +\infty[$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{\partial^n h}{\partial p^n}(p,t) = (-1)^n\, t^n\, e^{-pt}\, f(t) = (-1)^n\, e^{-pt}\, g_n(t)$. Fixons $p_1 > p_0$. On a alors la domination

$$\forall (p,t) \in [p_1, +\infty[\times\mathbb{R}_+ \qquad \left|\frac{\partial^n h}{\partial p^n}(p,t)\right| = e^{-pt}\, |g_n(t)| \leq e^{-p_1 t}\, |g_n(t)|\ ,$$

et la fonction $t \mapsto e^{-p_1 t}\, |g_n(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$: en effet, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n\, e^{-(p_1-p_0)t} = 0$, donc $e^{-p_1 t}\, |g_n(t)| = t^n\, e^{-p_1 t}\, |f(t)|$ est négligeable devant $e^{-p_0 t}\, |f(t)|$ lorsque t tend vers $+\infty$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, et en déduire que la fonction $\mathcal{L}[f]$ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle de la forme $[p_1, +\infty[$ avec $p_1 > p_0$, donc finalement sur $]p_0, +\infty[$. On a alors

$$\big(\mathcal{L}[f]\big)^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n h}{\partial p^n}(p,t)\, \mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, g_n(t)\, \mathrm{d}t = (-1)^n\, \mathcal{L}[g_n](p)\ .$$

---

28. Théorème de la valeur finale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, continue par morceaux, admettant une limite finie en $+\infty$: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = l$.

Montrer que la transformée $\mathcal{L}[f]$ est définie (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\lim_{p\to 0^+} p \cdot \mathcal{L}[f](p) = l = \lim_{t\to+\infty} f(t)\ .$$

- -

Méthode 1. D'abord, f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (elle est "bornée au voisinage de $+\infty$" i.e. sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$ car elle admet en $+\infty$ une limite finie, et une fonction continue par morceaux est d'autre part bornée sur tout segment $[0, A]$), donc la fonction $t \mapsto e^{-pt}\, f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $p > 0$. Pour $p > 0$, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} p e^{-pt}\, \mathrm{d}t = 1$, on a alors

$$p \cdot \mathcal{L}[f](p) - l = \int_0^{+\infty} p\, e^{-pt} \big(f(t) - l\big)\, \mathrm{d}t \; .$$

Soit M un majorant de $|f(t) - l|$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $A > 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \big|p \cdot \mathcal{L}[f](p) - l\big| &\leq \left|\int_0^A p\, e^{-pt} \big(f(t) - l\big)\, \mathrm{d}t\right| + \left|\int_A^{+\infty} p\, e^{-pt} \big(f(t) - l\big)\, \mathrm{d}t\right| \\ &\leq M \int_0^A p\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} p\, e^{-pt} \big|f(t) - l\big|\, \mathrm{d}t \; . \end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Soit $A > 0$ tel que $\big|f(t) - l\big| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $t \geq A$; la deuxième intégrale est alors majorée en module par $\dfrac{\varepsilon}{2} \displaystyle\int_A^{+\infty} p\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$, donc a fortiori par $\dfrac{\varepsilon}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} p\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t = \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Comme $\displaystyle\int_0^A p\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t = 1 - e^{-pA} \underset{p\to 0}{\longrightarrow} 0$, la première intégrale est inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ en module pour p suffisamment proche de 0 (disons pour $0 < p \leq p_0$).
Pour $0 < p \leq p_0$, on a alors $\big|p \cdot \mathcal{L}[f](p) - l\big| \leq \varepsilon$, cqfd.

Si $l \neq 0$, on peut alors préciser que l'ensemble de définition de la fonction $\mathcal{L}[f]$ est exactement $\mathbb{R}_+^*$, et que $\mathcal{L}[f](p) \underset{p\to 0}{\sim} \dfrac{l}{p}$.

Méthode 2. Pour $p > 0$, le changement de variable linéaire $x = pt$ donne

$$p\, \mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{p}\right) e^{-x}\, \mathrm{d}x \; .$$

On veut montrer que cette intégrale tend vers l lorsque p tend vers 0. Utilisons pour cela le théorème de convergence dominée à paramètre continu. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\displaystyle\lim_{p\to 0} f\left(\frac{x}{p}\right) e^{-x} = l\, e^{-x}$. Les fonctions $x \mapsto f\left(\dfrac{x}{p}\right) e^{-x}$ et $x \mapsto l\, e^{-x}$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, on sait que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (*cf.* Méthode 1, début), on a donc la domination

$$\forall (p, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \qquad \left|f\left(\frac{x}{p}\right) e^{-x}\right| \leq \varphi(x) = \|f\|_\infty\, e^{-x} \; ,$$

cette fonction φ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème s'applique donc et donne

$$\lim_{p\to 0} p\, \mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} l\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = l \; ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercices avec Python

29. Soit $g :]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^x$.

a. Prolonger g par continuité en 0.

b. Représenter graphiquement g. Justifier l'allure de g au voisinage de 0. Déterminer les coordonnées du minimum.

c. Donner une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

d. On admettra que $\displaystyle\int_0^1 (x\ \ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}}$ pour tout n entier naturel. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

e. Écrire une fonction `calcul(e)` retournant la valeur de l'intégrale I avec une précision `e` passée en argument.